

Γεωμετρία - Α' Λυκείου
Ασκήσεις επαναληψης με λύσεις
Διδάσκων :Γιαννοκώστας Φώτης

ΑΣΚΗΣΗ 1

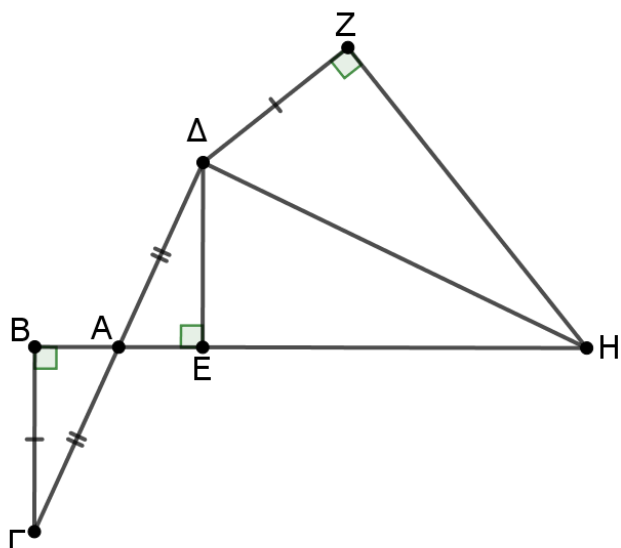
Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{\Delta ZH}$, αντίστοιχα. Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$.

Να αποδείξετε ότι:

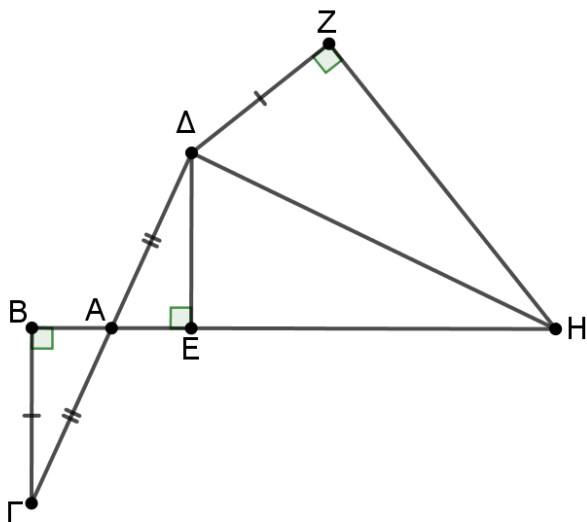
α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα.

β) Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E\hat{H}Z}$.

γ) Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες, τότε $\widehat{A\Delta E} = \frac{\widehat{E\hat{H}Z}}{2}$.



Απάντηση



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$.

Είναι ορθογώνια με $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{A}$ ορθές,

$A\Gamma = A\Delta$ ίσες από υπόθεση,

$\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ ως κατακορυφήν.

Άρα, τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι ίσα γιατί έχουν ίσες τις υποτείνουσές τους και δύο οξείες γωνίες. Επομένως, $B\Gamma = \Delta E$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ των ίσων τριγώνων.

β) Άρα, λόγω της υπόθεσης $B\Gamma = \Delta Z$, θα είναι και $\Delta E = \Delta Z$. Επομένως το Δ έχει ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$, $Z\hat{H}$ και $H\hat{E}$, άρα θα είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$.

Δηλαδή η DH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$.

γ) Οι $\hat{A}\hat{D}\hat{E}$ και $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ είναι συμπληρωματικές, ως οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AE\Delta$.

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta H$, οι γωνίες $\hat{\Delta}\hat{H}\hat{E}$ και $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ είναι συμπληρωματικές.

Άρα, $\hat{A}\hat{D}\hat{E} = \hat{\Delta}\hat{H}\hat{E}$, ως συμπληρωματικές της $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$.

Όμως, από το β' η DH είναι διχοτόμος της $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$, άρα $\hat{\Delta}\hat{H}\hat{E} = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$. Συνεπώς, $\hat{A}\hat{D}\hat{E} = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Gamma = GE$.

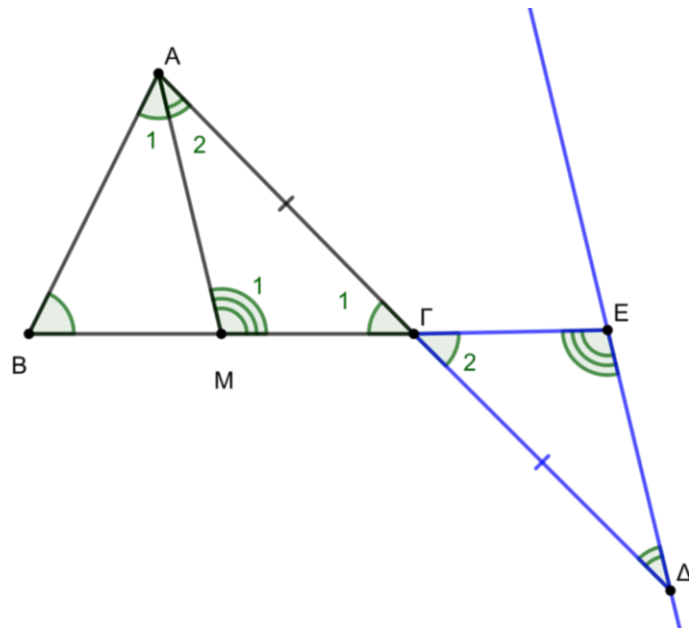
β) Το τετράπλευρο $AM\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) $\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{M} = \hat{\Gamma}\hat{E}\hat{\Delta}$.

Απάντηση

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος AM . Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ κατά $\Gamma\Delta = A\Gamma$.

Φέρουμε από το Δ παράλληλη στην AM που τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο E .



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMΓ και ΔΕΓ. Αυτά έχουν:

$AG = GD$, από υπόθεση,

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, ως κατακορυφήν,

$\hat{A}_2 = \hat{A}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM και DE που τέμνονται από την AD.

Είναι ίσα, επειδή έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες αντίστοιχα ίσες. Έτσι

$MG = GE$ γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{A}$.

β) Αφού $AG = GD$ και $MG = GE$, το τετράπλευρο AMDE είναι παραλληλόγραμμο επειδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται στο Γ.

γ) Στο τρίγωνο AMB, η εξωτερική γωνία $\hat{M}_1 = \hat{B} + B\hat{A}M$. (2)

$\hat{M}_1 = \hat{G}\hat{E}\hat{D}$ (3) επειδή είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων AM και DE που τέμνονται από την ME.

Από τις σχέσεις (2), (3) προκύπτει ότι $\hat{G}\hat{E}\hat{D} = \hat{B} + B\hat{A}M$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A}=90^\circ$) και M το μέσο της υποτείνουσας του BΓ. Από το M φέρουμε $MD \perp AB$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

α) Να αποδείξετε ότι:

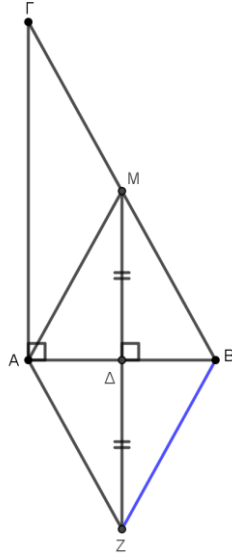
- i. Το τρίγωνο MBZ είναι ισοσκελές.
- ii. Το τετράπλευρο AMBZ είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το AMBZ;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) και M το μέσο της υποτείνουσάς του $B\Gamma$. Φέρουμε $M\Delta \perp AB$ και έστω $\Delta Z = M\Delta$.

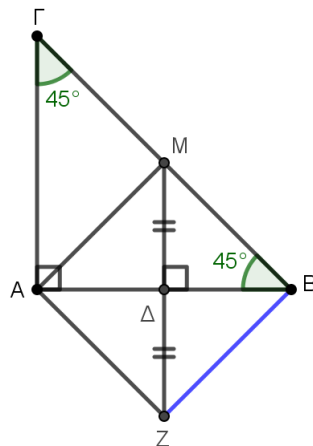


α)

i. Στο τρίγωνο MBZ επειδή $M\Delta = \Delta Z$ το τμήμα $B\Delta$ είναι διάμεσος της πλευράς MZ και επιπλέον $MZ \perp AB$ από υπόθεση, άρα το τμήμα $B\Delta$ είναι και ύψος του. Επομένως το τρίγωνο MBZ είναι ισοσκελές.

ii. $M\Delta \perp AB$ (1) από υπόθεση και $A\Gamma \perp AB$ αφού $\hat{A}=90^\circ$, άρα $M\Delta \parallel A\Gamma$ ως κάθετες στο ίδιο τμήμα AB . Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ από το μέσο M της $B\Gamma$ έχουμε $M\Delta \parallel A\Gamma$, άρα το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς AB . Στο τετράπλευρο $AMBZ$ οι διαγώνιές του διχοτομούνται αφού ισχύει επιπλέον ότι το Δ είναι μέσο και του τμήματος MZ από κατασκευή. Άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιές του MZ και AB είναι και κάθετες, τελικά το $AMBZ$ είναι ρόμβος.

β)



Αν το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, τότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}=45^\circ$ (άθροισμα ίσων οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου). Στο ρόμβο $AMBZ$ γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, άρα οι γωνίες $\hat{A\hat{B}M}=\hat{A\hat{B}Z}=45^\circ$. Οπότε $\hat{M\hat{B}Z}=90^\circ$ και ο ρόμβος $AMBZ$ έχει μία ορθή γωνία οπότε είναι και ορθογώνιο, άρα τελικά το $AMBZ$ είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ 4

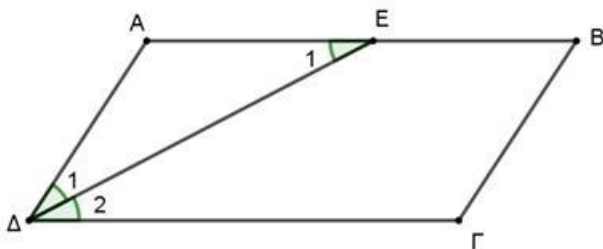
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ που τέμνει την AB στο μέσο της E .

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 2AD$.

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο E στην $\Gamma\Delta$ την τέμνει στο H , τότε να αποδείξετε ότι $\frac{DE}{HE} = 2$.

γ) Αν M το μέσο της $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισόπλευρο.

δ) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta\hat{A}\hat{\Gamma}} = 90^\circ$.



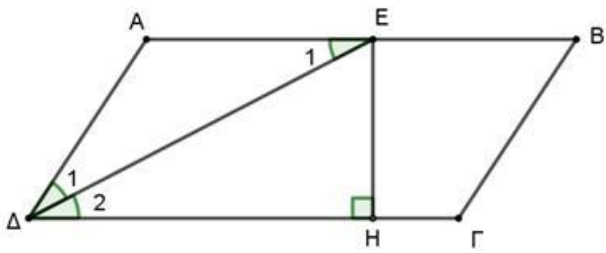
Απάντηση

α) Επειδή η DE είναι διχοτόμος της γωνίας Δ έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

Όμως $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την DE , οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$. Άρα το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές οπότε $AD = AE$.

Επειδή το E είναι μέσο του AB έχουμε $AB = 2AE = 2AD$.

β)

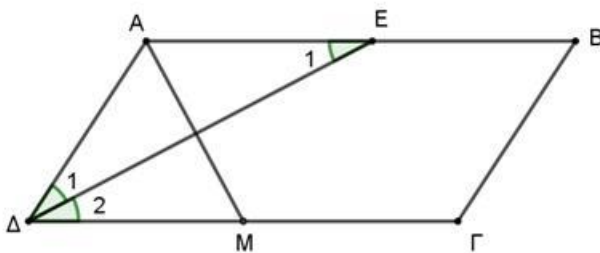


Οι γωνίες Α και Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε είναι παραπληρωματικές δηλαδή $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ και επειδή $\hat{A} = 120^\circ$ έχουμε $\hat{D} = 60^\circ$.

Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ προκύπτει $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε $\hat{D}_2 = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΕΗ είναι το μισό της υποτείνουσας ΔΕ, δηλαδή γωνία ΕΗ = $\frac{\Delta E}{2} (=) \frac{\Delta E}{EH} = 2$

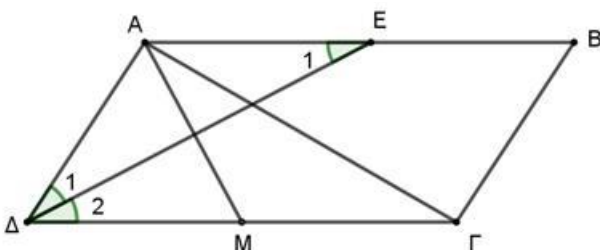
γ)



Από το ερώτημα (α) έχουμε $AB = 2 AD$ και $AB = DG$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, οπότε $DG = 2 AD$ (1). Επειδή το Μ είναι μέσο του ΔΓ, έχουμε $DG = 2 DM$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $AD = DM$.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές και επειδή η γωνία Δ είναι 60° το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

δ)



Επειδή το τρίγωνο ΜΑΔ είναι ισόπλευρο έχουμε $AM = MD = \frac{DG}{2}$.

Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ η AM είναι διάμεσος και ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $\Delta\Gamma$, οπότε η $\angle \hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

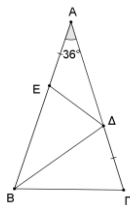
ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και E σημείο της πλευράς AB ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Delta$.

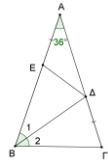
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Η παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΔE (προς το E) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



Απάντηση

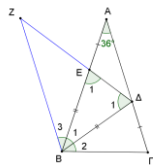
α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$, οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, το δεδομένο $\hat{A} = 36^\circ$ και τη σχέση (1) προκύπτει ότι $36^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B} = 144^\circ \Rightarrow \hat{B} = 72^\circ$.



Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ (2). Από το δεδομένο $\hat{A} = 36^\circ$ και τη σχέση (2) είναι $\hat{A} = \hat{B}_1$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο ίσες γωνίες. Οπότε, απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}_1$ βρίσκονται ίσες πλευρές αντίστοιχα, δηλαδή $B\Delta = A\Delta$ (3).

β) Από τα δεδομένα έχουμε $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$. Με αφαίρεση κατά μέλη είναι $AB - AE = A\Gamma - \Gamma\Delta$, δηλαδή $BE = A\Delta$ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $B\Delta = BE$, άρα το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Έστω ΒΖ η παράλληλη στην ΑΓ που τέμνει την προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) στο Ζ.



Από το β) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΒΔ και ΒΕ, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ΔΕ του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ (5). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΔΕ έχουμε ότι $\hat{B}_1 + \hat{D}_1 + \hat{E}_1 = 180^\circ$ και επειδή είναι $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ και από τη σχέση (4) θα έχουμε ότι

$$36^\circ + \hat{D}_1 + \hat{D}_1 = 180^\circ \quad \hookrightarrow \quad 2\hat{D}_1 = 144^\circ \quad \hookrightarrow \quad \hat{D}_1 = 72^\circ \quad (6).$$

Αφού BZ, ΑΓ είναι παράλληλες με τέμνουσα την AB, τότε είναι $\hat{B}_3 = \hat{A}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες. Αφού είναι $\hat{A} = 36^\circ$ από δεδομένα και $\hat{B}_3 = \hat{A}$ θα είναι $\hat{B}_3 = 36^\circ$. Είναι $\Delta\hat{B}Z = \hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ (7), όπου $\hat{B}_1 = 36^\circ$ από την (2).

Από τις σχέσεις (6) και (7) θα είναι $\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{B}Z$, άρα το τρίγωνο BΔZ είναι ισοσκελές γιατί έχει δύο γωνίες ίσες.