ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

14458

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$(x+4y)(x+y)=9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$ (Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$ (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) ι) Η δοσμένη σχέση μας δίνει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy \Leftrightarrow x^2+4xy+xy+4y^2=9xy \Leftrightarrow 4y^2+x^2-4xy=0 \Leftrightarrow (2y-x)^2=0 \quad (1)$$

ιι) Επειδή $(2y-x)^2=0 \Leftrightarrow 2y-x=0 \Leftrightarrow 2y=x \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}$ (2)

β) Είναι: $$\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2 \overset{2y=x}{=} \left(x-\frac{x}{2}\right)^2+\left(x+\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{3x}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{3x}{2}\right)^2 \overset{\frac{x}{2}=y}{=}$$

$$=y^2+(3y)^2=y^2+9y^2=10y^2$$

14489

Αν οι αριθμοί 2α-1 και β-1 είναι αντίστροφοι με α≠1 και β≠1 να δείξετε ότι:

α) 2α+β=2αβ (Μονάδες 10)

β) οι αριθμοί x=α-β και y=α(1-2β)+2β είναι αντίθετοι. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Αφού οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha\neq1$ και $\beta\neq1$ τότε ισχύει

$$(2\alpha-1)(\beta-1)=1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta-2\alpha-\beta+\cancel{1}=\cancel{1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\alpha\beta=2\alpha+\beta$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $x=-y \Leftrightarrow x+y=0$

Πράγματι $x+y=\alpha-\beta+\alpha(1-2\beta)+2\beta==\alpha-\beta+\alpha-2\alpha\beta+2\beta=2\alpha+\beta-2\alpha\beta=0$ αφού $2\alpha\beta=2\alpha+\beta$