

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

- ✓ Ασκήσεις στις οποίες ζητείται να αποδείξουμε ταυτότητες υπό συνθήκη.

Μέθοδος

Α' τρόπος

Ξεκινάμε από τη δοσμένη συνθήκη και μετά από τις σχετικές πράξεις καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Εφαρμογή

Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 - 2\alpha\beta$

Λύση

Έχουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\gamma$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = (-\gamma)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \gamma^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 - 2\alpha\beta$$

Β' τρόπος

Ξεκινάμε από την ταυτότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιούμε τη συνθήκη σε κάποιο βήμα της αποδεικτικής μεθόδου που ακολουθούμε. Ενδέχεται η δοθείσα συνθήκη να μη χρησιμοποιηθεί στην αρχική της μορφή αλλά να χρειαστεί να την μετασχηματίσουμε.

Εφαρμογή

Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Λύση

$$\text{Θέτω: } \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta - \gamma$$

Έχουμε:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\beta - \gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3(-\beta - \gamma)\beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -3\beta^2\gamma - 3\gamma^2\beta = -3\beta^2\gamma - 3\gamma^2\beta \text{ , ισχύει.}$$

Γ' τρόπος

Ξεκινάμε από το ένα μέλος της ισότητας το οποίο έχει τις περισσότερες πράξεις και αντικαθιστούμε τη δοσμένη συνθήκη ώστε να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

Εφαρμογή

Αν $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$, να αποδείξετε ότι: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = 0 \Leftrightarrow \beta\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma = 0$$

Τότε:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\end{aligned}$$

Εφαρμογή

Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Λύση

$$\text{Θέτω: } \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta - \gamma$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (-\beta - \gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -(\beta + \gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \\ &= -(\beta^3 + 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3) + \beta^3 + \gamma^3 = \dots\dots\dots = \\ &= -3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 = -3\beta\gamma(\beta + \gamma) = -3\beta\gamma(-\alpha) = 3\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$