

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ και $\frac{3}{4} < y < \frac{5}{2}$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

- i. $x + 2y$
- ii. $3x - 4y$
- iii. $\frac{x}{y}$
- iv. $x^2 - y^2$

Υπόδειξη: ii. $3x - 4y = 3x + (-4y)$ iii. $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ iv. $x^2 - y^2 = x^2 + (-y^2)$

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε:

- $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ (1)
- $\frac{3}{4} < y < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3}{4} < 2y < 2 \cdot \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < 2y < 5$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1), (2) και προκύπτει:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} < x + 2y < \frac{3}{2} + 5 \Leftrightarrow \frac{4}{2} < x + 2y < \frac{13}{2} \Leftrightarrow 2 < x + 2y < \frac{13}{2}$$

ii. Έχουμε:

- $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} < 3x < 3 \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < 3x < \frac{9}{2}$ (3)
- $\frac{3}{4} < y < \frac{5}{2} \Leftrightarrow (-4) \cdot \frac{3}{4} > -4y > (-4) \cdot \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -3 > -4y > -10 \Leftrightarrow -10 < -4y < -3$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (3), (4) και προκύπτει:

$$\frac{3}{2} - 10 < 3x - 4y < \frac{9}{2} - 3 \Leftrightarrow -\frac{17}{2} < 3x - 4y < \frac{3}{2}$$

iii. Έχουμε:

$$\bullet \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$\bullet \quad \frac{3}{4} < y < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} > \frac{1}{y} > \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{y} < \frac{4}{3} \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισότητες (5), (6) και προκύπτει:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} < x \cdot \frac{1}{y} < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{x}{y} < \frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{x}{y} < 2$$

iv. Έχουμε:

$$\bullet \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 < x^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4} \quad (7)$$

$$\bullet \quad \frac{3}{4} < y < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 < y^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{16} < y^2 < \frac{25}{4} \quad (8)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{9}{16} > -y^2 > -\frac{25}{4} \Leftrightarrow -\frac{25}{4} < -y^2 < -\frac{9}{16}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (7), (8) και προκύπτει:

$$\frac{1}{4} - \frac{25}{4} < x^2 - y^2 < \frac{9}{4} - \frac{9}{16} \Leftrightarrow -\frac{24}{4} < x^2 - y^2 < \frac{27}{16} \Leftrightarrow -6 < x^2 - y^2 < \frac{27}{16}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha + \beta}$$

ΛΥΣΗ

$$\text{ΕΚΤ} = \alpha\beta(\alpha + \beta) > 0$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha\beta} + \frac{\alpha}{\alpha\beta} \geq \frac{4}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} \geq \frac{4}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} \geq \alpha\beta(\alpha + \beta) \frac{4}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Αν $\alpha > \beta > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} > \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

ΛΥΣΗ

$$\text{ΕΚΤ} = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} > \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} &\Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} > (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \beta^2) > (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \beta^3 > \alpha^3 - \alpha^2\beta + \beta^2\alpha - \beta^3 \\ &\Leftrightarrow -\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 > -\alpha^2\beta + \beta^2\alpha \Leftrightarrow -\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + \alpha^2\beta - \beta^2\alpha > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta > 0 \Leftrightarrow 2\alpha\beta(\alpha - \beta) > 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha - \beta) > 0 \end{aligned}$$

Ισχύει διότι $\alpha\beta > 0$ και $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ από υπόθεση

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν $\alpha \neq \beta$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$$

ΛΥΣΗ

$$\text{ισχύει: } \alpha \neq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \neq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} &\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} \Leftrightarrow \\ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} &\leq (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq 2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \Leftrightarrow \\ \alpha^2 + \beta^2 &\leq 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \\ 0 &\leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 0 \leq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να προσδιορίσετε τα α, β στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $4\alpha^2 + \beta^2 - 16\alpha + 2\beta + 17 \leq 0$
- ii. $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 4\alpha + 4 \leq 0$

Υπόδειξη: $A^2 + B^2 \leq 0 \Leftrightarrow A = 0$ και $B = 0$