ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

- ✓ **Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε τη μέθοδο «απαγωγή σε άτοπο».**

__Μέθοδος__

Χρησιμοποιούμε σίγουρα τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο όταν στις εκφωνήσεις συναντάμε **άρνηση (δεν).** Τη μέθοδο αυτή τη χρησιμοποιούμε ακόμα και όταν δεν υπάρχει άρνηση στην εκφώνηση. Η περίπτωση αυτή, επειδή δεν είναι ιδιαίτερα ξεκάθαρη χρειάζεται εμπειρία και εξάσκηση προκειμένου να είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε τις ασκήσεις που χρειάζεται να την χρησιμοποιήσουμε.

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι για κάθε μη μηδενικό ακέραιο α και β **δεν** ισχύει:

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$$

Λύση

Έστω ότι ισχύει η ισότητα: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha\beta=0$

$\Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$, άτοπο αφού από υπόθεση $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$.

. Άρα δεν ισχύει η ισότητα.

Εφαρμογή

Αν α είναι ένας ακέραιος αριθμός και ο α^2 είναι άρτιος τότε να αποδείξετε ότι ο α είναι άρτιος.

Λύση

Έστω ότι ο α είναι περιττός. Τότε θα έχει τη μορφή α=2κ+1 όπου κ ακέραιος. Οπότε:

$\alpha^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=2(2\kappa^2+2\kappa)+1=2\lambda+1$

όπου $\lambda=2\kappa^2+2\kappa$, λ ακέραιος.

Δηλαδή ο $α^2$ είναι περιττός αριθμός, άτοπο αφού από υπόθεση ο $α^2$ είναι άρτιος. Επομένως, ο α είναι άρτιος.

- ✓ **Ασκήσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του αντιπαραδείγματος.**

<u>Μέθοδος</u>

Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας **ισχυρισμός δεν είναι αληθής** βρίσκουμε ένα παράδειγμα σύμφωνα με το οποίο ο ισχυρισμός αυτός δεν ισχύει. Δηλαδή βρίσκουμε ένα **αντιπαράδειγμα.**

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός:

«Για κάθε α,β ∈R ισχύει: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$» δεν είναι αληθής.

Λύση

Αν ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε α,β ∈R θα ισχύει και για α=1 και β=2.

Τότε: $(\alpha+\beta)^2=(1+2)^2=3^2=9$ και $\alpha^2+\beta^2=1^2+2^2=1+4=5$

Δηλαδή: $(\alpha+\beta)^2\neq\alpha^2+\beta^2$

Συνεπώς ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής.