

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ & ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

A' ENIAIOY ΛΥΚΕΙΟΥ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΛΑΙΟΛΟΓΟΥ ΠΑΥΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

1. ΔΥΝΑΜΕΙΣ : Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

✓ Αν α πραγματικός αριθμός και n φυσικός τότε:

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n-\phiορ\epsilon\varsigma}, \alpha^1 = \alpha, \alpha^0 = 1 (\alpha \neq 0), \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}, \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

✓ Αν n περιττός : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ενώ αν n άρτιος : $\alpha^n = \beta^n \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

✓ $\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda}, \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}, (\alpha \cdot \beta)^\kappa = \alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa = \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa}, (\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa \cdot \lambda}$

π.χ.1 $3x^3 \cdot x^2 = 3x^{3+2} = 3x^5$

π.χ.2 $x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$

π.χ.3 $2x \cdot 3x = 6x^{1+1} = 6x^2$ (Προσοχή : $x \cdot x = x^{1+1} = x^2$, ενώ $x + x = 2x$)

π.χ.4 $\frac{2x^5}{3x^2} = \frac{2}{3}x^{5-2} = \frac{2}{3}x^3$

π.χ.5 $(2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2$

π.χ.6 $(-3x)^2 = (-3)^2 \cdot x^2 = 9x^2$

π.χ.7 $(4x^3)^3 = 4^3 \cdot (x^3)^3 = 64x^{3 \cdot 3} = 64x^9$

π.χ.8 $\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{2^3} = \frac{x^{2 \cdot 3}}{8} = \frac{x^6}{8}$

π.χ.9 $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

π.χ.10 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ΑΣΚΗΣΗ 1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i. $2x^2 \cdot 5x^4 =$

ii. $-3x \cdot 2x =$

iii. $\frac{6x^4}{2x^3} =$

iv. $(3x)^2 =$

v. $(-4x)^2 =$

vi. $(2x^3)^2 =$

vii. $\left(\frac{2x^3}{4}\right)^2 =$

viii. $\sqrt[3]{x^4} =$

ix. $2x^{\frac{1}{2}} =$

2. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ :

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad (\text{Προσοχή: } (-\alpha - \beta)^2 = [-(\alpha + \beta)]^2 = (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \quad (\text{Προσοχή: } (-\beta + \alpha)^2 = (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 Να βρείτε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων : i) $(x+2)^2$ ii) $(2x-3)^2$

iii) $(x+\sqrt{2})^2$ iv) $(x-\frac{3}{2})^2$ v) x^2-9 vi) $4x^2-25$ vii) x^3-8 viii) x^3+27

ix) $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$ x) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ xi) $(-4x+5)^2$ xii) $(-2x-3)^2$ xiii) $(x+1)^3$

xiv) $(2x+3y)^2$ xv) $(x^2+2)^2$ xvi) $(x-2)^3$ xvii) $(3x-2)^2$

3. ΡΙΖΕΣ

Ισχύουν οι ιδιότητες :

- $\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ και n θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x^2} = |x|$, $\sqrt[4]{x^4} = |x|$)
- $\sqrt[n]{x^n} = x$, x θετικός ή 0 και n θετικός ακέραιος. (Συνήθως : $\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt[3]{x^3} = x$)
- $\sqrt[n]{x^\mu} = x^{\frac{\mu}{n}}$, x θετικός ή 0 και n, μ θετικοί ακέραιοι. (Συνήθως : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$)
- $\sqrt[n]{x^{2\mu}} = |x|^{\frac{2\mu}{n}} = (x^2)^{\frac{\mu}{n}}$, $x \in \mathbb{R}$ και n, μ θετικοί ακέραιοι.

ΠΡΟΣΟΧΗ : $\sqrt{x^2} = x$ ενώ $\sqrt{x^2} = |x|$.

- Όταν κάτω από τη ρίζα υπάρχει αριθμός που είναι τέλειο τετράγωνο τότε εύκολα υπολογίζω το αποτέλεσμα. π.χ. $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{144} = 12$ κτλ. Όταν όμως ο αριθμός δεν είναι τέλειο τετράγωνο κοιτώ μήπως μπορώ να απλοποιήσω τη ρίζα γράφοντας τον αριθμό σαν γινόμενο δυο αριθμών εκ των οποίων ο ένας να είναι τέλειο τετράγωνο.

π.χ.1 $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

π.χ.2 $\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = 4\sqrt{2}$

π.χ.3 $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει μια ρίζα, τότε πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη ρίζα αυτή ώστε να προκύψει κλάσμα που στον παρανομαστή δεν έχει ρίζα.

π.χ.1 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

π.χ.2 $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Όταν έχω κλάσμα που στον παρανομαστή υπάρχει παράσταση της μορφής $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha} \pm \beta$, $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, τότε για να απαλλαγώ από τη ρίζα στον παρανομαστή πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρανομαστή.

π.χ.1 $\frac{2}{\sqrt{5}+2} = \frac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2) \cdot (\sqrt{5}-2)} = \frac{2\sqrt{5}-4}{\sqrt{5^2}-2^2} = \frac{2\sqrt{5}-4}{5-4} = 2\sqrt{5}-4$

$$\text{π.χ.2} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{5}-\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{6}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{6}^2} = \frac{\sqrt{30}+6}{5-6} = -(\sqrt{30}+6) = -\sqrt{30}-6$$

$$\text{π.χ.3} \frac{3}{2\sqrt{3}-3} = \frac{3 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3) \cdot (2\sqrt{3}+3)} = \frac{6\sqrt{3}+9}{(2\sqrt{3})^2-9} = \frac{6\sqrt{3}+9}{12-9} = \frac{3(2\sqrt{3}+3)}{3} = 2\sqrt{3}+3$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω ρίζες :

i) $\sqrt{50}$ ii) $\sqrt{27}$ iii) $\sqrt{12}$ iv) $\sqrt{48}$

ΑΣΚΗΣΗ 4 Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, σε ισοδύναμα με ρητούς παρανομαστές.

i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ii) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ iv) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ v) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ vi) $\frac{5}{3+\sqrt{2}}$ vii) $\frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

4. Η ΕΞΙΣΩΣΗ : $\alpha x + \beta = 0$

Μια εξίσωση πρώτου βαθμού έχει τελικά τη μορφή
 $\alpha x + \beta = 0$ ή $\alpha x = -\beta$ (1)

- Αν $\alpha \neq 0$, η (1) έχει μόνο μια λύση (ρίζα), την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$.
 - Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, η (1) είναι αδύνατη (δεν έχει λύση).
 - Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, η (1) είναι ταυτότητα ή αόριστη (αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x).

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $3x(x-3) + (x-3)^2 = 4x^2 - 36$

Λύση : $3x(x-3) + (x-3)^2 - 4x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + x^2 - 6x + 9 - 4x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow$
 $-15x + 45 = 0 \Leftrightarrow -15x = -45 \Leftrightarrow x = \frac{-45}{-15} \Leftrightarrow x = 3$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x+7}{6} - 2$

Λύση : Πρώτα από όλα θέλω να απαλλαγώ από τα κλάσματα. Βρίσκω ΕΚΠ(3,2,6) = 6 και στη συνέχεια πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να κάνω απαλοιφή παρανομαστών.
 $6 \cdot \frac{2(x-1)}{3} - 6 \cdot \frac{x+1}{2} = 6 \cdot \frac{x+7}{6} - 2 \cdot 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 2(x-1) - 3(x+1) = x+7-12 \Leftrightarrow 4x-4-3x-3 = x+7-12 \Leftrightarrow$

$4x-3x-x = 7+3+4-12 \Leftrightarrow 0x = 2$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ 5 Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $3x-18=0$ ii) $-3(x+2)-2(x-1)=8+x$

iii) $(2x+1)^2+5=4(x^2-10)$ iv) $(x+1)^3+x^2-1=0$

5. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{Διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

➤ Αν $\Delta > 0$ τότε $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

➤ Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$

➤ Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 3x + 2 = 0$

Είναι $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$, έχει δυο πραγματικές ρίζες άνισες τις

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

π.χ.2 Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 + 10x + 25 = 0$

Είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, έχει μια πραγματική διπλή ρίζα την

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

π.χ.3 Να λύσετε την εξίσωση : $(x-3)^2 + 4x = -3$

$$(x-3)^2 + 4x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 12 = 0$$

Είναι $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 4 - 48 = -44 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Προσοχή : Όταν $\beta=0$ ή $\gamma=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μπορεί να λυθεί πιο εύκολα χωρίς τη χρήση της διακρινουσας. Πιο συγκεκριμένα :

➤ Αν $\beta=0$ τότε $\alpha x^2 + \gamma = 0$

π.χ.1 $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4$

π.χ.2 $x^2 - 169 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 169 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{169} \Leftrightarrow x = \pm 13$

π.χ.3 $x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3 \cdot 4} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

π.χ.4 $x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$ Αδύνατη.

➤ Αν $\gamma=0$ τότε $\alpha x^2 + \beta x = 0$

π.χ.1 $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

π.χ.2 $x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x+6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$

ΑΣΚΗΣΗ 6 Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ii) $x^2 - 6x + 9 = 0$

iii) $(x-2)^2 + 3x = 2$ iv) $x^2 - 9x = 0$ v) $x^2 - 9 = 0$ vi) $2x^2 - 72 = 0$ vii) $\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}x = 0$

viii) $\frac{(x-9)^2}{3} = 27$

6. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να λύσω μια κλασματική εξίσωση, δηλ. εξίσωση που έχει άγνωστο στον παρανομαστή, 1^{ov} παραγοντοποιώ τους παρανομαστές και βρίσκω το ΕΚΠ τους, 2^{ov} παίρνω περιορισμούς, 3^{ov} πολλαπλασιάζω κάθε όρο με το ΕΚΠ ώστε να γίνει απαλοιφή παρανομαστών και λύνω την εξίσωση που προκύπτει, 4^{ov} ελέγχω αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς.

π.χ.1 Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1}$

Λύση: $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{8}{(x-1)(x+1)}$ ΕΚΠ = $(x-1)(x+1)$

Πρέπει $(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \& x \neq -1$

$$(x-1)(x+1) \frac{x}{x-1} - (x-1)(x+1) \frac{2}{x+1} = (x-1)(x+1) \frac{8}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$x(x+1) - 2(x-1) = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2x + 2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad (\text{δεκτή}) \quad \text{ή} \\ x = -2 \quad (\text{δεκτή}).$$

ΑΣΚΗΣΗ 7 Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-4}{x^2+2x} = 0$

7. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2 ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ 2 ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

- Μέθοδος αντικατάστασης
- Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

π.χ.1 Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

Λύση: $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 1 \cdot (2) \\ 2x + 7y = 8 \cdot (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 10y = 2 \\ -6x - 21y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow$ προσθέτοντας κατά μέλη
προκύπτει $-11y = -22 \Leftrightarrow y = 2$ και αντικαθιστώντας στη 1^η έχω :
 $3x + 5 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$. (Μέθοδος Αντίθετων Συντελεστών)

π.χ.2 Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x^2 + 16 - 3xy = 0 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

Λύση: $\begin{cases} 2x^2 + 16 - 3xy = 0 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 16 - 3xy = 0(1) \\ x = 2y - 4(2) \end{cases}$ η (1) λόγω της (2) γίνεται :

$$2(2y-4)^2 + 16 - 3(2y-4)y = 0 \Leftrightarrow 2(4y^2 - 16y + 16) + 16 - 6y^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 20y + 48 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 10y + 24 = 0 \Leftrightarrow y = 6 \quad \text{ή} \quad y = 4. \text{ Για } y = 6 \text{ από (2) } x = 8. \text{ Για } y = 4 \text{ από (2) } x = 4. \\ (\text{Μέθοδος της Αντικατάστασης})$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα : i) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 8x + 3y = 46 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$

8. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Για να λύσω μια ανίσωση της μορφής : $ax + b > 0$ ή $ax + b < 0$

Λειτουργώ όπως και στις εξισώσεις πρώτου βαθμού, δηλαδή χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, και στη συνέχεια διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου. Αν σε κάποιο στάδιο πολλαπλασιάσω ή διαιρέσω και τα 2 μέλη με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.

π.χ.1 Να λυθεί η ανίσωση : $-3x + 18 \geq 0$

Λύση: $-3x + 18 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -18 \Leftrightarrow x \leq 6$

π.χ.2 Να λυθεί η ανίσωση : $2x - 9 > 5x + 6$

Λύση: $2x - 9 > 5x + 6 \Leftrightarrow 2x - 5x > 6 + 9 \Leftrightarrow -3x > 15 \Leftrightarrow x < -5$

π.χ.3 Να λυθεί η ανίσωση : $4(3x - 5) > 3(4x + 5)$

Λύση: $4(3x - 5) > 3(4x + 5) \Leftrightarrow 12x - 20 > 12x + 15 \Leftrightarrow 12x - 12x > 15 + 20 \Leftrightarrow 0 > 35$ Αδύνατη

π.χ.4 Να λυθεί η ανίσωση : $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x+4}{6}$

Λύση: $1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) < \frac{x+4}{6} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{6} < \frac{x+4}{6} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} < \frac{x+4}{6} \xrightarrow{\cdot 6} \Leftrightarrow 6 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2}x - 6 \cdot \frac{2}{6} < 6 \cdot \frac{x+4}{6} \Leftrightarrow 6 - 3x - 2 < x + 4 \Leftrightarrow -3x - x < 4 - 4 \Leftrightarrow -4x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

ΑΣΚΗΣΗ 9 Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $11 - 3x < 7x + 1$ ii. $2(3x - 1) > 15 - 5(2x - 3)$ iii. $\frac{3-4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6-x}{2}$

9. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση από άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

➤ ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

1. ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ **π.χ.1** $2y^2 - 5y = y(2y - 5)$, **π.χ.2**
 $x(x - 3) - 2(3 - x) = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2)$
2. ΚΑΤΑ ΟΜΑΔΕΣ **π.χ.2** $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

➤ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2. ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
3. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

π.χ.1 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

- i) $16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x - 1)(4x + 1)$
- ii) $(3x - 1)^2 - 81 = (3x - 1)^2 - 9^2 = (3x - 1 - 9)(3x - 1 + 9) = (3x - 10)(3x + 8)$

➤ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

- αν $\Delta > 0$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
- αν $\Delta = 0$ όπου x_1 η διπλή ρίζα $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
- αν $\Delta < 0$ τότε δεν παραγοντοποιείται

π.χ.1 $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

π.χ.2 $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

ΑΣΚΗΣΗ 10 Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $x^2 - 8x + 12$ ii) $-3x^2 + 12x - 9$

10. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η τριγωνομετρία είναι δύο πράγματα: Οι τύποι και ο τριγωνομετρικός πίνακας.

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι και αριθμοί

1. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ ή $\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$ ή $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2. $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ για $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k: \text{ακέραιος} \right\}$

4. Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

Γωνία ω	0°	$\frac{\pi}{6}$ ή 30°	$\frac{\pi}{4}$ ή 45°	$\frac{\pi}{3}$ ή 60°	$\frac{\pi}{2}$ ή 90°
$\eta\mu\omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sigma\upsilon\nu\omega$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται

5. Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο :

ΑΠΟ 2^ο -> 1^ο

$\eta\mu(180^\circ - x) = \eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = -\sigma\upsilon\nu x$
$\epsilon\phi(180^\circ - x) = -\epsilon\phi x$

π.χ.1 Να υπολογιστούν οι παρακάτω τριγωνομετρικοί αριθμοί :

i) $\eta\mu 120^\circ$ ii) $\sigma\upsilon\nu 135^\circ$ iii) $\epsilon\phi 150^\circ$

Λύση :

$$\text{i) } \eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2^\circ \rightarrow 1^\circ)$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2^\circ \rightarrow 1^\circ)$$

$$\text{iii) } \epsilon\phi 150^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\phi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2^\circ \rightarrow 1^\circ)$$

ΑΣΚΗΣΗ 11 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :

i) 120° ii) 135° iii) 150°

ΑΣΚΗΣΗ 12 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

ΑΣΚΗΣΗ 13 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

ΑΣΚΗΣΗ 14 Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$, τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

ΑΣΚΗΣΗ 15 Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i) } (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2$$

$$\text{ii) } (\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\beta\eta\mu\omega - \alpha\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{iii) } \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = 1 - \eta\mu x$$

$$\text{iv) } \epsilon\phi x + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16 Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i) } (1 - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(1 - \eta\mu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)$$

$$\text{ii) } \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να λυθούν οι εξίσωσης :

i. $5(-x+2)-4=6-5x$

ii. $\frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{x-5}{6}$

iii. $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+3}{5} = x-2$

iv. $\frac{x^2}{3} - \frac{6x+1}{4} = \frac{x-2}{6} - 2$

v. $2x^2-18=0$

vi. $(3x-1)(2x+1)=6$

vii. $x^2+3x=0$

viii. $2x^2-5x+4=0$

ix. $(2x-1)^2-3(2x-1)=0$

x. $3x^2-2(x-1)=2x+1$

xi. $(x+2)^2+(x-1)^2=5(2x+3)$

xii. $(2x-3)^2-(x-2)^2=2x^2-11$

xiii. $x(8-x)-(3x+1)(x+2)=1$

2. Να λυθούν οι εξίσώσεις :

i. $\frac{4}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} = 1$

ii. $\frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$

iii. $\frac{x+3}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x} - \frac{2}{x+1}$

iv. $x^2-25 \quad x+5$

v. $\frac{x+1}{x^2-x-2} - \frac{1}{x-2} = 0$

vi. $\frac{x^2+5}{x^2-x} - \frac{x+5}{x-1} = \frac{1}{x}$

vii. $\frac{1}{x^2-2x} + \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-2}$

viii. $1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x} = 0$

ix. $\frac{2x^2}{x^2+2x} = 3 - \frac{4}{x+2}$

x. $\frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4}$

xi. $1 + \frac{3x}{x-2} = \frac{x+4}{x^2-3x+2}$

3. α. $x^2 - 2(\lambda + 2)x + 2\lambda^2 - 17 = 0$ να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση να έχει 1 διπλή ρίζα.
 β. $(\lambda + 3)x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda + 2 = 0$ να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση να έχει 2 ρίζες άνισες.
 γ. Αν $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$ με $\lambda \neq 0$, νδο η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

4. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

- i.
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 3y = 44 \end{cases}$$

 ii.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$$

 iii.
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$$

 iv.
$$\begin{cases} 4x - 3(2x + 3y) = 20 - x + y \\ 2(x - 2y) + 5(x - 2) = 3y + 4 \end{cases}$$

 v.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

 vi.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

 vii.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$$

 viii.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

 ix.
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 - 2xy - 4 = 0 \end{cases}$$

 x.
$$\begin{cases} x^2 - 2y = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

 xi.
$$\begin{cases} (2x - 3y + 4)(x + y) = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

 xii.
$$\begin{cases} y^2 + 5y - 2xy = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = y \end{cases}$$

 xiii.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases}$$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i.
$$\frac{2x+1}{6} - x < \frac{3-2x}{3}$$

 ii.
$$\frac{2x-3}{5} - \frac{6x-5}{15} > \frac{x-1}{3} - \frac{3}{5}$$

6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων :

i.
$$\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$$

ii.
$$\begin{cases} 4x + 3 < 9 + 5x \\ 1 - x < 2x + 7 \end{cases}$$

iii.
$$\begin{cases} 2x + 5 < \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x-1}{2} + 1 > x + \frac{1}{3} \end{cases}$$

7. Να παραγοντοποιήσετε και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τα οποίες ορίζονται.

i.
$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

ii.
$$\frac{x^2 - 25}{x + 5}$$

iii.
$$\frac{x^3 - 9x}{x + 3}$$

iv.
$$\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$$

v.
$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$$

vi.
$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 5}$$

vii.
$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + x}$$

viii.
$$\frac{x^3 - x}{x - 1}$$

ix.
$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$$

x.
$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

xi.
$$\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2 - 1}$$

xii.
$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x}$$

xiii.
$$\frac{(x-2)(x-3) - (3-x)(x-7)}{x^2 - 9}$$

xiv.
$$\frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$$

xv.
$$\frac{x^2 - x + 5x - 5}{x^2 - 1}$$