

Α.1.5. ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ-ΜΚΔ-ΕΚΠ-ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Δύο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί έχουν άπειρα κοινά πολλαπλάσια. Το μικρότερο από αυτά τα κοινά πολλαπλάσια ($\neq 0$) ονομάζεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών.

Παράδειγμα

Να βρείτε τα πολλαπλάσια του 12, του 15, του 20 και στη συνέχεια το $\text{ΕΚΠ}(12,15,20)$.

Απάντηση

Πολλαπλάσια του 12: 0, 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180....

Πολλαπλάσια του 15: 0, 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180...

Πολλαπλάσια του 20: 0, 20, 40, **60**, 80, 100, 120, 140, 160, 180....

Κοινά Πολλαπλάσια: 60, 120, 180....

$\text{ΕΚΠ}(12,15,20)=60$

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

Παράδειγμα

Να βρείτε τους διαιρέτες του 12, του 15 και του 20.

Απάντηση

Διαιρέτες του 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Διαιρέτες του 15: 1, 3, 5, 15.

Διαιρέτες του 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 που έχει διαιρέτες **μόνο** τον εαυτό του και τη μονάδα (1) λέγεται **πρώτος αριθμός**.

Πρώτοι αριθμοί: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.....

(ΚΟΣΚΙΝΟ ΤΟΥ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ σελ. 29 σχ. βιβλίο)

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ένας φυσικός αριθμός, που εκτός από τον εαυτό του και τη μονάδα (1) έχει και άλλους διαιρέτες λέγεται **σύνθετος αριθμός**.

Σύνθετοι αριθμοί: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40.....

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το 1 έχει μόνο έναν διαιρέτη, τον εαυτό του και για αυτό δεν θεωρείται ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.
- Ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός **άρτιος πρώτος** αριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Δύο ή περισσότεροι φυσικοί αριθμοί μπορεί να έχουν **κοινούς διαιρέτες**. Ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών αυτών λέγεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)**.

Παράδειγμα

Να βρείτε τους διαιρέτες του 14, του 18 και του 20 και στη συνέχεια τον ΜΚΔ(14,18,20).

Απάντηση

Διαιρέτες του 14: 1, 2, 7, 14.

Διαιρέτες του 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Διαιρέτες του 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

$\text{ΜΚΔ}(14,18,20)=2$

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Αν ο ΜΚΔ δύο αριθμών α και β είναι ο αριθμός 1, δηλαδή $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=1$ τότε οι αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους**. Καθένας από τους αριθμούς α και β δεν είναι υποχρεωτικά πρώτος.

Παράδειγμα

Να βρείτε: $\text{ΜΚΔ}(3,5)$ και $\text{ΜΚΔ}(5, 8)$.

Απάντηση

Διαιρέτες του 3: 1, 3 (3: πρώτος αριθμός)

Διαιρέτες του 5: 1, 5 (5: πρώτος αριθμός)

Διαιρέτες του 8: 1, 2, 4, 8 (8: σύνθετος αριθμός)

$\text{ΜΚΔ}(3, 5)=1$, άρα οι αριθμοί 3 και 5 είναι **πρώτοι μεταξύ τους**.

$\text{ΜΚΔ}(5, 8)=1$, άρα οι αριθμοί 5 και 8 είναι **πρώτοι μεταξύ τους**.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

Κριτήρια διαιρετότητας λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να διαπιστώσουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με συγκεκριμένους αριθμούς.

Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται:

- με το 10, αν τελειώνει σε ένα μηδενικό,
- με το 100, αν τελειώνει σε δύο μηδενικά,
- με το 1000, αν τελειώνει σε τρία μηδενικά
κοκ..
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6 ή 8
(π.χ. 206, 158, 1.002....)
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 (π.χ. 36, 255, 8.880....)
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9 (45, 558, 9.999...)
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν τελειώνει σε 0 ή 5
(55, 100, 1.005...)
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4, αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 (124, 2.312, 5.024...)
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 25, αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 25 (225, 2.050, 3.075...)
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το 4 και το 25, αν τα δυο τελευταία ψηφία του είναι μηδέν (400, 5.200, 10.200....)

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται συγχρόνως με το 2 και το 3 δηλαδή αν τελειώνει σε 0, 2, 4, 6, ή 8 και το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 (2.820, 20.502, 350.004...)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

- Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί, με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η διαδικασία αυτή λέγεται **ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**.

Άσκηση

Να αναλύσετε τους αριθμούς 3.150, 3.528 και 3.780 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και στη συνέχεια να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ αυτών των αριθμών.

Λύση

Αναλύουμε τους αριθμούς αυτούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, κάνοντας διαδοχικές διαιρέσεις με **πρώτους** αριθμούς:

3.150	2	3.528	2	3.780	2
1.575	3	1.764	2	1.890	2
525	3	882	2	945	3
175	5	441	3	315	3
35	5	147	3	105	3
7	7	49	7	35	5
1		7	7	7	7
		1		1	

- ✓ Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν βρω πηλίκο 1.

Επομένως έχουμε:

- $3.150 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
- $3.528 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$
- $3.780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

ΕΥΡΕΣΗ ΕΚΤ

Για να βρούμε το ΕΚΤ επιλέγουμε τους κοινούς και μη κοινούς παράγοντες με τον μεγαλύτερο εκθέτη, δηλαδή τους: 2^3 , 3^3 , 5^2 και 7^2 .

$$\text{Άρα: ΕΚΤ}(3.150, 3.528, 3.780) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 264.600.$$

ΕΥΡΕΣΗ ΜΚΔ

Για να βρούμε τον ΜΚΔ επιλέγουμε τους κοινούς παράγοντες με τον μικρότερο εκθέτη, δηλαδή τους: 2, 3^2 και 7.

$$\text{Άρα: ΜΚΔ}(3.150, 3.528, 3.780) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Δίνονται οι αριθμοί:

72	150	372	664	333	8.776
4.422	716	792	885	441	402
576	2.236	117	3.300	632.448	1.000.005

Να βρείτε ποιοι αριθμοί διαιρούνται με:

α) το 2 β) το 3 γ) το 5 δ) το 9 ε) το 4 και το 25 στ) το 6 ζ) το 4 η) το 25

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς:

α) 55	β) 27	γ) 64	δ) 144
ε) 112	στ) 702	ζ) 3.060	η) 9.009

3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους παρακάτω αριθμούς και στη συνέχεια να βρείτε το ΕΚΤ και τον ΜΚΔ των παρακάτω αριθμών.

α) 350, 455, 558 β) 368, 549, 724 γ) 2.405, 4.206, 5.409