



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right)$$

Λύση
 Έχουμε

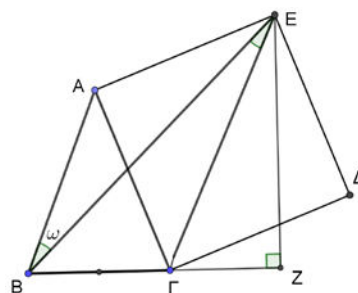
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(-21)^7}{7^7} + \frac{(-15)^7}{(-5)^7} + 4044 \right) : \left(\frac{(-14)^3}{7^3} + \frac{(-18)^3}{(-9)^3} + 2 \right) \\ &= \left(\left(\frac{-21}{7} \right)^7 + \left(\frac{-15}{-5} \right)^7 + 4044 \right) : \left(\left(\frac{-14}{7} \right)^3 + \left(\frac{-18}{-9} \right)^3 + 2 \right) \\ &= \left((-3)^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left((-2)^3 + 2^3 + 2 \right) \\ &= \left(-3^7 + 3^7 + 4044 \right) : \left(-2^3 + 2^3 + 2 \right) = 4044 : 2 = 2022. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

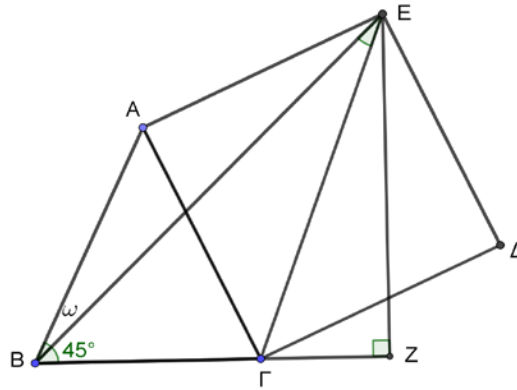
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $\widehat{ABE} = \omega$ και $\widehat{EZ\Gamma} = 90^\circ$, τότε:

(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ABΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: BZ = EZ



Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $AE = AG = AB$, το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, οπότε $\angle AEB = \omega$.
Επειδή $\angle BAE = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ABG έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{G} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

(β) Έχουμε $\angle EBZ = \hat{B} - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$. Επειδή το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο με $\angle EZB = 90^\circ$, έπεται ότι $\angle BEZ = 90^\circ - \angle EBZ = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, οπότε το τρίγωνο EZB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $BZ = EZ$.

Πρόβλημα 3

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα $\frac{3}{4}$ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

Λύση

Έστω x οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7x$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και x είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9x$ καραμέλες.

Έστω y οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7y$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και y είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν $9y$ καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν $9x - 9y$ καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y.$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2^η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y = 8y$

Επομένως $2x \geq 8y$ και το ζητούμενο έπεται.

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A = \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right)$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5} + \frac{(-44)^5}{(-4)^5} \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left(\left(\frac{-22}{2} \right)^5 + \left(\frac{-44}{-4} \right)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left(\left(\frac{-10}{2} \right)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left(\left((-11)^5 + (+11)^5 \right) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : \left((-5)^{10} - (-5)^{10} + 10^3 \right) \\ &= \left((-11^5 + 11^5) \cdot (-2022)^2 + 10^6 \right) : (0 + 10^3) \\ &= (0 \cdot (-2022)^2 + 10^6) : (+10) = 10^6 : 10^3 = 10^3. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

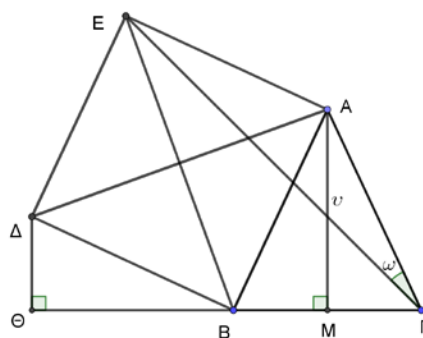
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ και το τετράπλευρο ABΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\widehat{A\Gamma E} = \omega$, $\widehat{\Delta\Theta B} = 90^\circ = \widehat{A\hat{M}B}$

και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \nu$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.

(2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και ν .



Λύση

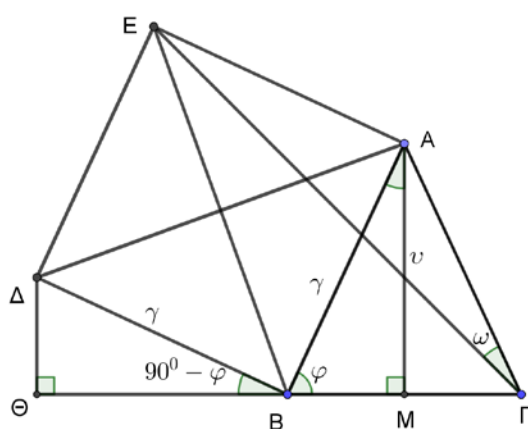
(α) Επειδή $AE = AB = AG$, το τρίγωνο $AΓΕ$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \omega$.
Επειδή $\hat{\Gamma}\hat{A}E = \hat{A} + 90^\circ$, έπεται ότι:

$$\hat{A} + 90^\circ + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - 2\omega.$$

Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - 2\omega)}{2} = 45^\circ + \omega.$$

Άρα έχουμε: $\hat{E}\hat{\Gamma}B = \hat{A}\hat{\Gamma}B - \omega = (45^\circ + \omega) - \omega = 45^\circ$.



Σχήμα 2

(β) (1ος τρόπος)

Επειδή $\hat{A}\hat{B}\Delta = 90^\circ$, οι γωνίες $\hat{A}\hat{B}M$ και $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta$ έχουν άθροισμα 90° , δηλαδή είναι συμπληρωματικές. Έτσι, αν $\hat{A}\hat{B}M = \varphi$, τότε $\hat{\Delta}\hat{B}\Theta = 90^\circ - \varphi$.

Έστω $AB = B\Delta = \gamma$. Τότε, αφού $\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = 90^\circ - \hat{\Delta}\hat{B}\Theta = \varphi$, έχουμε:

$$\Delta\Theta = \gamma \cdot \eta\mu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

$$B\Theta = \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \varphi) = \gamma \cdot \eta\mu\hat{B}\hat{\Delta}\Theta = \gamma \cdot \eta\mu\varphi = AM = \nu.$$

Άρα έχουμε:

$$(\Delta M \Theta \Delta) = \frac{1}{2} \cdot (\Delta M + \Theta \Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

(β) 2ος τρόπος

Τα τρίγωνα AMB και $B\Theta\Delta$ είναι ορθογώνια, αφού $\hat{M} = \hat{\Theta} = 90^\circ$ και επιπλέον έχουν:

1. $AB = B\Delta$, αφού το τετράπλευρο $AB\Delta E$ είναι τετράγωνο και
2. $\hat{M}\hat{A}B = \hat{\Theta}\hat{B}\Delta$, αφού

$$\widehat{MAB} = \frac{\widehat{A}}{2} = 45^\circ - \omega, \quad \widehat{B\Delta} = 180^\circ - \widehat{AB\Delta} - \widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - (45^\circ + \omega) = 45^\circ - \omega$$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα AMB και BΘΔ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$B\Theta = AM = \nu \quad \text{και} \quad \Delta\Theta = BM = \frac{\alpha}{2}.$$

Άρα έχουμε:

$$(\text{AM}\Theta\Delta) = \frac{1}{2} \cdot (\text{AM} + \Theta\Delta) \cdot M\Theta = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Πρόβλημα 3

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή ήταν A κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός A , όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ, λ, μ , τέτοιοι ώστε:

$$\begin{cases} A = 7\kappa + 1 \\ A = 9\lambda + 1 \\ A = 64\mu + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 1 = 7\kappa \\ A - 1 = 9\lambda \\ A - 1 = 64\mu + 2 \end{cases} \Rightarrow A - 1 = 7\kappa = 9\lambda = 64\mu + 2$$

$$\Rightarrow \frac{A-1}{63} = \frac{\kappa}{9} = \frac{\lambda}{7} = \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z} \Rightarrow \kappa = 9\omega, \quad \lambda = 7\omega \quad \text{και} \quad \frac{64\mu+2}{63} = \omega \in \mathbb{Z}.$$

Άρα ο αριθμός 63 πρέπει να διαιρεί τον αριθμό $64\mu + 2$. Έχουμε:

$$\frac{64\mu+2}{63} = \frac{63\mu+\mu+2}{63} = \mu + \frac{\mu+2}{63} \Rightarrow \mu + 2 = 63\nu, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu = 63\nu - 2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$A = 64\mu + 3 = 64 \cdot 63\nu - 128 + 3 = 4032\nu - 125.$$

Επειδή $35000 < A < 40000$, έχουμε:

$$35000 < 4032\nu - 125 < 40000 \Leftrightarrow 35125 < 4032\nu < 40125$$

$$\Leftrightarrow \frac{35125}{4032} < \nu < \frac{40125}{4032} \Leftrightarrow 8,71 < \nu < 9,95 \Leftrightarrow \nu = 9,$$

αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, ο πληθυσμός της πόλης είναι

$$A = 4032 \cdot 9 - 125 = 36163.$$

2ος τρόπος

Αφού $35000 = 7 \cdot 5000$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 7 είναι ο $35000 = 7 \cdot 5000 + 1 = 35001$.

Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35001, 35008, 35015, 35022, 35029, \dots$$

Αφού το άθροισμα των ψηφίων του 35001 είναι 9, ο 35001 είναι πολλαπλάσιο του. Πράγματι, $35001 = 9 \cdot 3889$, οπότε ο πρώτος ακέραιος ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρείται με το 9 είναι ο $35002 (= 9 \cdot 3889 + 1)$. Έτσι, έχουμε τους αριθμούς

$$35002, 35011, 35020, 35029, 35038, \dots$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος κοινός αριθμός από τις παραπάνω λίστες είναι ο 35029, και ότι κάθε επόμενος προκύπτει με πρόσθεση του $EKP(7, 9) = 63$, οπότε έχουμε τους αριθμούς της μορφής

$$35029 + 63k,$$

με k μη αρνητικό ακέραιο.

Αφού $35000 = 546 \cdot 64 + 56$, ο πρώτος ακέραιος, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από το 35000, και αφήνει υπόλοιπο 3 όταν διαιρείται με το 64 είναι ο $547 \cdot 64 + 3 = 35011$. Κάθε επόμενος τέτοιος αριθμός προκύπτει με πρόσθεση του 64, οπότε έχουμε τους αριθμούς

$$35011 + 64\lambda,$$

με λ μη αρνητικό ακέραιο.

Θέλουμε να καλύψουμε τη διαφορά $35029 - 35011 = 18$ προσθέτοντας τη διαφορά $64 - 63 = 1$, κατάλληλο αριθμό φορές, δηλαδή 18.

Πιο αναλυτικά, θέλουμε

$$35029 + 63k = 35011 + 64\lambda,$$

δηλαδή

$$64\lambda - 63k = 18 \tag{1}$$

για κατάλληλους ακέραιους.

Αφού $64 - 63 = 1$, μια προφανής λύση είναι η $k = \lambda = 18$, και άρα

$$A = 35011 + 64 \cdot 18 = 36163.$$



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
83ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2022

Ενδεικτικές λύσεις

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} = 1.$$

Λύση

Για $x, y \neq 0$ θέτουμε $\frac{1}{x} = \varphi \neq 0, \frac{1}{y} = \omega \neq 0$, οπότε το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = 1 \\ \frac{\varphi^2}{\omega} + \frac{\omega^2}{\varphi} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = 1 \\ \varphi^3 + \omega^3 = \varphi\omega \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ (1 - \omega)^3 + \omega^3 = (1 - \omega)\omega \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ 1 - 3\omega + 3\omega^2 - \omega^3 + \omega^3 = \omega - \omega^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ 1 - 4\omega + 4\omega^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ (1 - 2\omega)^2 = 0 \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 1 - \omega \\ 1 - 2\omega = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\varphi, \omega) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 2). \end{aligned}$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του

συστήματος $\left\{ \begin{array}{l} \varphi + \omega = 1 \\ \varphi^3 + \omega^3 = \varphi\omega \end{array} \right\}$, οπότε θα προέκυπτε η εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^3 + \omega^3}{\varphi + \omega} = \varphi\omega & \Leftrightarrow \frac{(\varphi + \omega)(\varphi^2 - \varphi\omega + \omega^2)}{\varphi + \omega} = \varphi\omega \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi\omega + \omega^2 = \varphi\omega \\ & \Leftrightarrow (\varphi - \omega)^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \omega \text{ κλπ.} \end{aligned}$$

2ος τρόπος

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, για $xy \neq 0$, παίρνουμε:

$$y + x = xy \quad \text{και} \quad y^3 + x^3 = x^2y^2.$$

Έτσι,

$$y^3 + x^3 = xy(y + x) = xy^2 + x^2y,$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$y^2(y-x) + x^2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (y-x)^2(y+x) = 0.$$

Αφού $y+x = xy \neq 0$, παίρνουμε $y = x$, και εύκολα από την πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι $x = y = 2$.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB και Γ ένα σημείο στο εσωτερικό του, έτσι ώστε $A\Gamma > AB/2$. Σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία AB θεωρούμε τα σημεία Δ, E έτσι ώστε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και ABE να είναι ισοσκελή, με $\Delta A = \Delta\Gamma > EA = EB$ και $\Delta A \parallel E\Gamma$. Η παράλληλη από το σημείο Δ προς την ευθεία EA τέμνει την ευθεία $E\Gamma$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

(α) $\Gamma\Delta = EZ$ και $\Delta Z = BE$

(β) $BZ \parallel \Delta\Gamma$.

Λύση

(α) Το τετράπλευρο $E\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Επομένως, έχουμε:

$$\Delta\Gamma = \Delta A = EZ \quad (1).$$

$$EB = EA = \Delta Z \quad (2)$$

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), τα τρίγωνα $\Gamma\Delta Z$ και ZEB , έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία. Θα αποδείξουμε ότι έχουν και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή $\widehat{Z\Gamma\Delta} = \widehat{B\hat{E}Z}$. Έχουμε:

$$\widehat{Z\Gamma\Delta} = \widehat{Z\Delta A} - \widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{A\hat{E}Z} - \widehat{\Gamma\Delta A}$$

και

$$\widehat{B\hat{E}Z} = \widehat{B\hat{E}A} - \widehat{Z\hat{E}A}.$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{Z\Gamma\Delta} = \widehat{B\hat{E}Z},$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι :

$$\widehat{B\hat{E}A} + \widehat{\Gamma\Delta A} = 2 \cdot \widehat{Z\hat{E}A} \quad (3)$$

Από τα ισοσκελή $B\hat{E}A$, $\Gamma\Delta A$, παίρνουμε ότι

$$\widehat{B\hat{E}A} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{E\hat{A}B}$$

$$\text{και} \quad \widehat{\Gamma\Delta A} = 180^\circ - 2 \cdot \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta}.$$

Επομένως

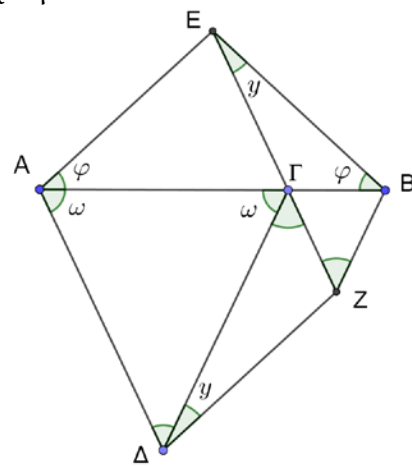
$$\begin{aligned} \widehat{B\hat{E}A} + \widehat{\Gamma\Delta A} &= 2 \cdot (180^\circ - \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} - \widehat{E\hat{A}B}) \\ &= 2 \cdot (180^\circ - \widehat{E\hat{A}\Delta}) = 2 \cdot \widehat{A\hat{\Delta}Z} = 2 \cdot \widehat{Z\hat{E}A}, \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Επομένως, τα τρίγωνα $\Gamma\Delta Z$ και ZEB είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\widehat{\Delta\Gamma Z} = \widehat{B\hat{Z}E}$, δηλαδή οι ευθείες $\Gamma\Delta$ και BZ τεμνόμενες από την ευθεία ΓZ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Άρα είναι $BZ \parallel \Delta\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Έστω $n > 2$ ένας περιττός ακέραιος. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n+2$. Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, τότε ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.



Σχήμα 1

Λύση

Αφού ο k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n + 2$, θα έχουμε ότι $k < \sqrt{n + 2} \leq k + 1$, οπότε

$$k^2 < n + 2 \leq k^2 + 2k + 1.$$

Διαιρώντας με k , παίρνουμε $k < \frac{n}{k} + \frac{2}{k} \leq k + 2 + \frac{1}{k}$, δηλαδή

$$k - \frac{2}{k} < \frac{n}{k} \leq k + 2 - \frac{1}{k}.$$

Αφού ο $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, από την παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{n}{k} \in \{k, k + 1\}.$$

Όμως, αν $\frac{n}{k} = k + 1$, τότε $n = k(k + 1)$, οπότε ο n διαιρείται από το 2 (αφού κάποιος από τους $k, k + 1$ διαιρείται από το 2). Αυτό είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση ο n είναι περιττός ακέραιος. Επομένως, αναγκαστικά έχουμε $\frac{n}{k} = k$, οπότε $n = k^2$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \neq 0, \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{1}{9}, xyz = 27 \right\}.$$

Λύση

Για $xyz \neq 0$, θέτουμε $\frac{1}{x} = \alpha, \frac{1}{y} = \beta, \frac{1}{z} = \gamma$, οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\left\{ \alpha + \beta + \gamma \neq 0, \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \frac{1}{9}, \alpha\beta\gamma = \frac{1}{27} \right\}.$$

Από τη δεύτερη και την τρίτη εξίσωση έχουμε:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \left[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\alpha + \beta + \gamma \neq 0}{\Leftrightarrow} (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 0 &\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\beta - \gamma)^2 = (\gamma - \alpha)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = 0 &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma. \end{aligned}$$

Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε:

$$\alpha^3 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \text{ οπότε έχουμε: } \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3} \text{ και τελικά}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$2(x-1)(y-1) - 2(x-1)\sqrt{y-1} - 2(y-1)\sqrt{x-1} + x + y - 2 \leq 0.$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για $x \geq 1$ και $y \geq 1$. Θέτουμε

$$\alpha = \sqrt{x-1} \geq 0 \text{ και } \beta = \sqrt{y-1} \geq 0.,$$

οπότε η δεδομένη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} & 2\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^2) + (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^2 + \beta^2) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \alpha^2(\beta^2 - 2\beta + 1) + \beta^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \alpha^2(\beta - 1)^2 + \beta^2(\alpha - 1)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Αν ήταν κάποιος από τους όρους $\alpha(\beta - 1)$, $\beta(\alpha - 1)$ διάφορος του μηδενός, τότε θα είχαμε $\alpha^2(\beta - 1)^2 + \beta^2(\alpha - 1)^2 > 0$, άτοπο. Άρα η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta - 1) = 0, \beta(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ ή } \alpha = \beta = 1 \\ & \sqrt{x-1} = 0 = \sqrt{y-1} \text{ ή } \sqrt{x-1} = 1 = \sqrt{y-1} \\ & x = y = 1 \text{ ή } x = y = 2. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

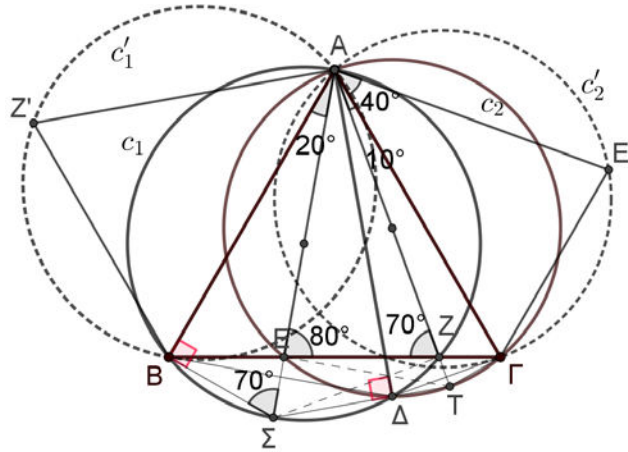
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο επίπεδό του μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε $\widehat{A\Delta B} = 70^\circ$ και $\widehat{A\Delta \Gamma} = 80^\circ$.

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{B\Delta A}$.

Λύση

Θεωρούμε (τα μοναδικά) σημεία E και Z στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέτοια ώστε $\widehat{BAE} = 20^\circ$ και $\widehat{Z\Delta \Gamma} = 10^\circ$. Τότε είναι $\widehat{A\hat{E}\Gamma} = 80^\circ$ και $\widehat{A\hat{Z}B} = 70^\circ$. Έστω c_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABZ και c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A\Gamma E$. Τότε οι κύκλοι c_1 και c_2 τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο Δ διαφορετικό του A , για το οποίο ισχύει:

$$\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\hat{Z}B} = 70^\circ \text{ και } \widehat{A\Delta \Gamma} = \widehat{A\hat{E}\Gamma} = 80^\circ.$$



Σχήμα 2

Επίσης, έστω E' το συμμετρικό του E ως προς την $ΑΓ$ και Z' το συμμετρικό του Z ως προς την $ΑΒ$. Έστω c_1' ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΒΖ'$ και c_2' ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΓΕ'$. Τότε είναι:

$$\angle AE'\Gamma = 80^\circ \text{ και } \angle AZ'B = 70^\circ$$

Προφανώς το τόξο $AZ'B$ του c_1' και το τόξο $AE'\Gamma$ του c_2' , δεν τέμνονται σε σημείο διαφορετικό από το A . Το τόξο $AZ'B$ του c_1' δεν τέμνει το τόξο $AE'\Gamma$ του c_2' , αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ σε εσωτερικό της σημείο. Επίσης, το τόξο $AE'\Gamma$ του c_2' , δεν τέμνει το τόξο AZB του c_1 , αφού το τελευταίο τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ σε εσωτερικό της σημείο. Συνεπώς, το Δ είναι μοναδικό.

Έστω Σ το σημείο τομής της προέκτασης της $ΑΕ$ και του c_1 , και έστω T το σημείο τομής της προέκτασης της $ΑΖ$ και του c_2 . Αφού τα σημεία A, B, Σ, Δ, Z είναι ομοκυκλικά και $\widehat{BZ\Sigma} = \widehat{BA\Sigma} = 20^\circ$ έχουμε

$$\widehat{A\Delta\Sigma} = \widehat{A\Delta Z} = \widehat{A\Delta B} + \widehat{B\Delta Z} = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ.$$

Ομοίως, αφού τα σημεία A, E, Δ, T, Γ είναι ομοκυκλικά και $\widehat{\Gamma\hat{E}T} = \widehat{\Gamma\hat{A}T} = 10^\circ$ έχουμε

$$\widehat{A\hat{\Delta}T} = \widehat{A\hat{E}T} = \widehat{A\hat{E}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{E}T} = 80^\circ + 10^\circ = 90^\circ.$$

Συνεπώς, τα σημεία Σ, Δ, T είναι συνευθειακά

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $ΑΒΣΖ$ και $ΑΕΤΓ$ έχουμε

$$\widehat{E\hat{T}A} = \widehat{E\hat{\Gamma}A} = 60^\circ \text{ και } \widehat{A\hat{\Sigma}Z} = \widehat{A\hat{B}Z} = 60^\circ.$$

Άρα $\widehat{E\hat{T}Z} = 60^\circ = \widehat{E\hat{\Sigma}Z}$, που σημαίνει ότι το τετράπλευρο $EZT\Sigma$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $\widehat{A\hat{\Sigma}\Delta} = \widehat{A\hat{Z}E} = 70^\circ$, και άρα $\widehat{\Sigma\hat{A}\Delta} = 20^\circ$ στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΣ$. Συνεπώς,

$$\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{A}\Sigma} + \widehat{\Sigma\hat{A}\Delta} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ.$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Έστω a, b μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b = 2$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = 8(a^3 + b^3) - 3(a^4 + b^4).$$

Λύση

Θέτουμε $p = ab$ Τότε έχουμε:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 8 - 6p. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = ((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 \\ &= (4 - 2p)^2 - 2p^2 = 16 - 16p + 2p^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Επομένως, η δεδομένη παράσταση γίνεται:

$$A = 8(8 - 6p) - 3(16 - 16p + 2p^2) = -6p^2 + 16$$

Επειδή $0 \leq p = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$, έπεται ότι:

$$0 \leq p^2 \leq 1 \Rightarrow -6 \leq -6p^2 \leq 0 \Rightarrow 10 \leq A = -6p^2 + 16 \leq 16$$

Η ισότητα στο αριστερό μέλος ισχύει όταν $p^2 = 1 \Leftrightarrow ab = 1 \stackrel{a+b=2}{\Leftrightarrow} a = b = 1$.

Η ισότητα στο δεξιό μέλος ισχύει όταν

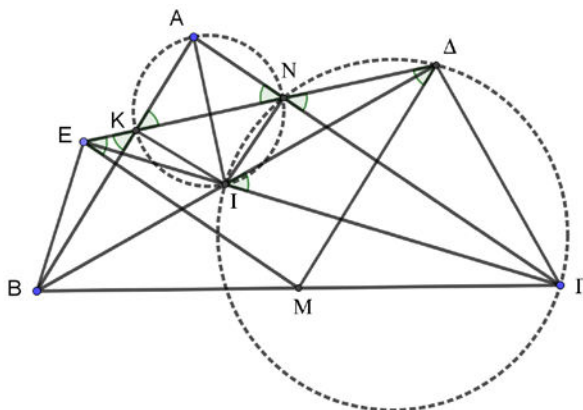
$$p^2 = 0 \Leftrightarrow ab = 0 \stackrel{a+b=2}{\Leftrightarrow} (a, b) = (2, 0) \text{ ή } (a, b) = (0, 2).$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι 10 και η μέγιστη 16

Πρόβλημα 2

Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$. Έστω Δ σημείο στη διχοτόμο της γωνίας B τέτοιο ώστε $M\Delta = MB$ και έστω E σημείο στη διχοτόμο της γωνίας Γ τέτοιο ώστε $ME = M\Gamma$. Έστω I το σημείο τομής των διχοτόμων $B\Delta$ και ΓE , έστω K το σημείο τομής των ευθειών AB και $E\Delta$, και έστω N το σημείο τομής των ευθειών $A\Gamma$ και $E\Delta$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, K, I, N είναι ομοκυκλικά.

Λύση



Σχήμα 3

Επειδή η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και $MB = MD$, έπεται ότι:
 $\hat{MAB} = \hat{MDB} = \hat{DBA}$, οπότε θα είναι $MD \parallel BA$.

Ομοίως, προκύπτει και ότι: $ME \parallel GA$.

Άρα έχουμε:

$$\hat{ANK} = \hat{NKG} = \hat{GEM} \text{ και } \hat{KNE} = \hat{EBG} = \hat{EMD}.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο EMD έχουμε $\hat{EMD} = \hat{EDM}$, οπότε από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει η ισότητα $\hat{ANK} = \hat{KNE}$. Άρα το τρίγωνο AKN είναι ισοσκελές με $AK = AN$, οπότε η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ είναι κάθετη προς την πλευρά KN . Επομένως, έχουμε:

$$\hat{KNG} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{G}}{2} = \hat{IGG},$$

αφού η γωνία $\hat{IGG}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο BIG . Επομένως, το τετράπλευρο $KNIG$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Το τρίγωνο DBG είναι ορθογώνιο, αφού $MD = BM = MG = \frac{BG}{2}$, οπότε θα είναι

και $\hat{IDG} = 90^\circ$, Άρα είναι και $\hat{KNG} = 90^\circ \Rightarrow \hat{KNA} = 90^\circ$. Ομοίως προκύπτει ότι $\hat{KIA} = 90^\circ$. Επομένως, $\hat{KNA} + \hat{KIA} = 180^\circ$, οπότε το τετράπλευρο $AKIN$ είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 3

Η συνάρτηση $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{N}^*) \subseteq \mathbb{N}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(6n+7) = 6f(n) + 7 \quad \text{και} \quad f(7n-1) = 7f(n) - 1,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να προσδιορίσετε την τιμή $f(2029)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι:

$$2029 = 6 \cdot 338 + 1 = 6 \cdot 337 + 7$$

$$337 = 6 \cdot 56 + 1 = 6 \cdot 55 + 7$$

$$55 = 6 \cdot 9 + 1 = 6 \cdot 8 + 7$$

και επίσης ότι

$$7n-1 = 6n+7 \Leftrightarrow n=8.$$

Με $n=8$ στις δεδομένες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$f(55) = 6f(8) + 7 \quad \text{και} \quad f(55) = 7f(8) - 1,$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα

$$7f(8) - 1 = 6f(8) + 7,$$

οπότε $f(8) = 8$. Άρα έχουμε:

$$f(55) = 6f(8) + 7 = 6 \cdot 8 + 7 = 55$$

$$f(337) = 6f(55) + 7 = 6 \cdot 55 + 7 = 337$$

$$f(2029) = 6f(337) + 7 = 6 \cdot 337 + 7 = 2029.$$