

Βαγγέλης Νικολακάκης

μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

πλήρης επανάληψη

2022

- ερωτήσεις - απαντήσεις θεωρίας
- SOS λυμένα θέματα
- θέματα για απάντηση (θεωρία - ασκήσεις από εξετάσεις)

ΠΟΤΗ ΝΕΦΗΛΙΝΩΝΑΠΙΣΤΕ

Αντί Προλόγου

- Το παρόν βιβλίο αφορά την πλήρη επανάληψη στα Μαθηματικά Α Γυμνασίου .
- Το Κεφάλαιο 1 έχει τις βασικότερες ερωτήσεις θεωρίας με τις απαντήσεις τους
- Το Κεφάλαιο 2 έχει SOS ασκήσεις με τις απαντήσεις τους.
- Το Κεφάλαιο 3 έχει 13 θέματα θεωρίας και 21 ασκήσεις (σύνολο 34) όλα από εξετάσεις σχολείων και θα προσπαθήσετε να τα απαντήσετε μόνοι σας με την αντίστοιχη βοήθεια του καθηγητή σας από το On Line Μάθημα.

Επιλέγοντας λοιπόν ,από το κεφάλαιο αυτό , 1 θέμα θεωρίας και 2 ασκήσεις (1 Άλγεβρας και 1 Γεωμετρίας) ,γράφουμε όσα διαγωνίσματα θέλουμε !

- Από την τελική σας επανάληψη βέβαια θα εξαιρέσετε τις ερωτήσεις-θέματα που συσχετίζονται με ύλη που έχει αφαιρεθεί στο σχολείο σας (πχ αν σας βγάλουν από την ύλη το κεφάλαιο 5,δηλαδή τα Ποσοστά , δεν θα ασχοληθείτε με αντίστοιχα θέματα)
- Φιλοδοξία μας δε είναι οι μαθητές Α Γυμνασίου να πορευτούν με απόλυτη επιτυχία στις εξετάσεις του σχολείου τους.

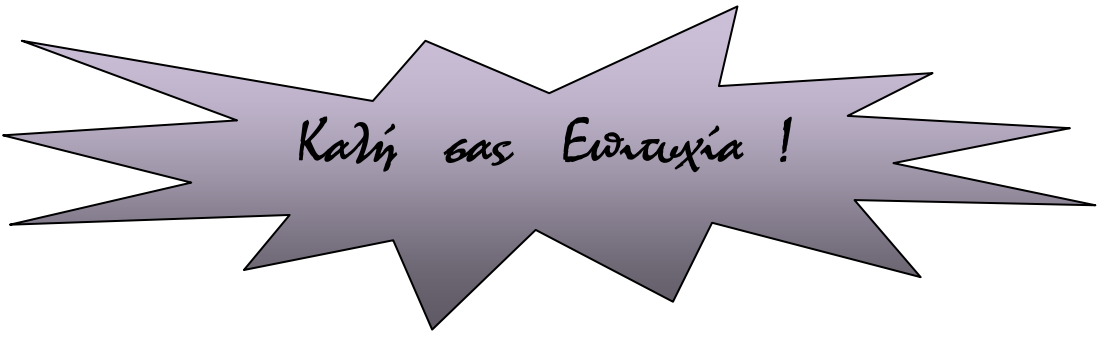
Βαγγέλης Α Νικολακάκης
ΑΘΗΝΑ
Κιν 6937020032

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ και οι αποδείξεις θεωρίας.....4-28
2. Λυμένα SOS Θέματα.....29-49
3. Θέματα Εξετάσεων για απάντηση.....50-63

ΠΩΣ ΚΑΝΟΥΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Διαβάζουμε ότι έχουμε διδαχθεί στο σχολείο μας
2. Μελετούμε πολύ προσεκτικά τις ερωτήσεις και τις απαντήσεις θεωρίας του κεφ- 1 και στην συνέχεια προσπαθούμε να τις απαντήσουμε μόνοι μας.
3. Μελετούμε πολύ προσεκτικά τα θέματα με τις απαντήσεις τους στο κεφ-2 και εμπεδώνουμε την θεωρία, βλέποντας παράλληλα το στυλ των θεμάτων που μπαίνουν στις εξετάσεις αλλά και τον τρόπο που πρέπει να απαντάμε !
4. Ελέγχουμε τις γνώσεις μας στην θεωρία αλλά και την ικανότητα μας στις ασκήσεις απαντώντας στα θέματα του κεφ-3.Στις όποιες δυσκολίες έχουμε θα συνεργαζόμαστε με τον καθηγητή μας στο On Line Μάθημα



Καλή σας Εισημερία !

Το παρόν βιβλίο προσφέρεται ΔΩΡΕΑΝ σε συναδέλφους ,γονείς και μαθητές Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως έχει (χωρίς τροποποιήσεις)

Σε κάθε περίπτωση απαγορεύεται η εμπορική χρήση του από τρίτους , η ανάρτηση του στο Internet κλπ.

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι Φυσικοί Αριθμοί

1. Τι ονομάζεται Ευκλείδεια διαίρεση;

Ονομάζεται Ευκλείδεια διαίρεση η διαδικασία εκείνη κατά την οποία μας δίνονται δύο φυσικοί αριθμοί, οι Δ (διααιρετέος) και $\delta \neq 0$ (διαιρέτης), και βρίσκουμε δύο άλλους φυσικούς αριθμούς τους π (πηλίκο) και ν (υπόλοιπο), έτσι ώστε να ισχύει:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \nu \quad \nu < \delta$$

2. Πότε η Ευκλείδεια διαίρεση λέγεται τέλεια και ποιες είναι οι ιδιότητες της ;

Μια Ευκλείδεια διαίρεση ονομάζεται **τέλεια** όταν το υπόλοιπο της είναι ίσο με μηδέν. Ισχύει τότε $\Delta = \delta \cdot \pi$. Οι ιδιότητες της τέλειαις διαίρεσης είναι:

- ♦ Στους φυσικούς αριθμούς η **τέλεια διαίρεση** είναι πράξη **αντίστροφη** του πολλαπλασιασμού, δηλαδή αν $\Delta = \delta \cdot \pi$ τότε $\Delta : \delta = \pi$ ή $\Delta : \pi = \delta$
- ♦ $a : a = 1$ (γιατί $a \cdot 1 = a$)
- ♦ $a : 1 = a$ (γιατί $1 \cdot a = a$)
- ♦ αν $a \neq 0$ $0 : a = 0$ (γιατί $a \cdot 0 = 0$)
- ♦ αν $a \neq 0$ $a : 0$ αδύνατη (γιατί αν είναι π το πηλίκο $\pi \cdot 0 = 0 \neq a$)
- ♦ $0 : 0$ αόριστη (γιατί ισχύει $0 \cdot \pi = 0$ όποιο και αν είναι το πηλίκο π)

3. Τι ονομάζονται πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;

Ονομάζονται πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού οι αριθμοί που προκύπτουν όταν τον πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά με όλους τους Φυσικούς αριθμούς.

4. Ποιες ιδιότητες ισχύουν για τα πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού;

- ♦ Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσια του.
- ♦ Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο φυσικό είναι πολλαπλάσιο του.
- ♦ Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλο θα διαιρεί και τα πολλαπλάσια του.

5. Τι ονομάζεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο η περισσότερων αριθμών διαφορετικών του μηδενός;

Ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο η περισσότερων αριθμών διαφορετικών του μηδενός το μικρότερο από τα κοινά τους πολλαπλάσια που είναι διαφορετικό από το μηδέν;

6. Ποιοι ονομάζονται διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού;

Ονομάζονται διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού οι αριθμοί που τον διαιρούν ακριβώς.

7. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι;

Πρώτοι αριθμοί ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί, εκτός του 1, που έχουν διαιρέτες μόνο τον εαυτό τους και την μονάδα.

Σύνθετοι αριθμοί ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που δεν είναι πρώτοι, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί που έχουν και άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό τους και την μονάδα.

8. Τι ονομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο φυσικών αριθμών; ΜΚΔ(α, β).

Ονομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο φυσικών αριθμών α , β και συμβολίζεται ΜΚΔ(α , β), ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες.

9. Πότε δύο φυσικοί αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους;

Δύο φυσικοί αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους όταν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι η μονάδα.

10. Ποια είναι τα κριτήρια της διαιρετότητας;

- ♦ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι το 0
- ♦ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι το 0 ή το 2 ή το 4 ή το 6 ή το 8.
- ♦ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι το 0 ή το 5.

- ♦ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3 ή του 9 αντίστοιχα.
- ♦ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25 αν τα δύο τελευταία ψηφία είναι αριθμός που διαιρείται με το 4 ή το 25.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Τα Κλάσματα

11. Τι ονομάζεται κλασματική μονάδα ;

Ονομάζεται **κλασματική μονάδα** το σύμβολο της μορφής $\frac{1}{n}$ (n φυσικός $\neq 0$) που εκφράζει το ένα από τα n ίσα μέρη στα οποία χωρίστηκε μια ποσότητα.

12. Τι ονομάζεται κλάσμα ή κλασματικός αριθμός και τι διακρίνουμε σ' αυτό;

Ονομάζεται **κλάσμα ή κλασματικός αριθμός** ένα σύμβολο της μορφής $\frac{\kappa}{\nu}$ όπου οι αριθμοί κ , ν είναι φυσικοί αριθμοί και ο $\nu \neq 0$.

Οι αριθμοί κ , ν λέγονται όροι του κλάσματος.

Ο αριθμός κ , λέγεται αριθμητής του κλάσματος.

Ο αριθμός ν , λέγεται παρονομαστής του κλάσματος.

13. Τι παριστάνει ένα κλάσμα;

Ένα κλάσμα παριστάνει το ακριβές πηλίκο μιας διαίρεσης στην οποία ο αριθμητής του είναι ο διαιρετέος και ο παρονομαστής του ο διαιρέτης.

14. Μπορεί ένας φυσικός αριθμός να γραφεί σαν κλάσμα;

Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται σαν κλάσμα με αριθμητή τον ίδιο τον φυσικό και παρονομαστή την μονάδα. Δηλαδή αν a φυσικός τότε $a = \frac{a}{1}$

15. Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα;

Δύο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους.

16. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ισοδυνάμων κλασμάτων;

- ♦ Αν πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο, διάφορο του μηδενός, φυσικό προκύπτει ισοδύναμο του κλάσμα.

Δηλαδή αν $\lambda \neq 0$ τότε $\frac{a}{b} = \frac{\lambda \cdot a}{\lambda \cdot b}$

- ♦ Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη τους προκύπτει ισοδύναμο κλάσματα

Δηλαδή $\frac{a}{b} = \frac{a : \lambda}{b : \lambda}$

Η διαδικασία αυτή λέγεται **απλοποίηση** του κλάσματος και έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία κλάματος ίσου με το αρχικό αλλά με μικρότερους όρους.

Το κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί λέγεται **ανάγωγο**.

- ♦ Αν δύο κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα χιαστί γινόμενα **$a\delta$** και **$\beta\gamma$** είναι ίσα και αντιστρόφως.

Δηλαδή αν $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $a\delta = \beta\gamma$

17. Πότε δύο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται ομώνυμα και πότε ετερόνυμα;

Δύο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται ομώνυμα όταν έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Δύο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται ετερόνυμα όταν δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

18. Πως συγκρίνουμε δύο κλάσματα;

- ♦ Αν δύο κλάσματα είναι ομώνυμα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.
- ♦ Αν δύο κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.
- ♦ Αν δύο κλάσματα είναι ετερόνυμα τα τρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και τότε μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μεγαλύτερο αριθμητή.

19. Τι ονομάζεται μικτός αριθμός;

Ονομάζεται **μεικτός αριθμός** ένα σύμβολο της μορφής της μορφής $\kappa \frac{\lambda}{\nu}$ που παριστάνει το άθροισμα του φυσικού αριθμού κ με το κλάσμα $\frac{\lambda}{\nu}$.

$$\text{Δηλαδή, } \kappa \frac{\lambda}{\nu} = \kappa + \frac{\lambda}{\nu}.$$

20. Πότε δύο κλάσματα λέγονται αντίστροφα;

Δύο κλάσματα λέγονται αντίστροφα όταν το γινόμενο τους είναι ίσο με την μονάδα.

21. Πότε ένα κλάσμα λέγεται σύνθετο;

Ένα κλάσμα λέγεται σύνθετο όταν ένας τουλάχιστον από τους όρους του είναι κλάσμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Δεκαδικοί Αριθμοί

22. Πότε ένα κλάσμα λέγεται δεκαδικό;

Ένα κλάσμα λέγεται δεκαδικό όταν έχει παρανομαστή μια δύναμη του 10.

23. Πως γράφεται ως δεκαδικός αριθμός κάθε δεκαδικό κλάσμα;

Για να γράψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό γράφουμε τον αριθμητή και τοποθετούμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις προς τα αριστερά όσα και τα μηδενικά ψηφία που έχει ο παρανομαστής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Εξισώσεις και Προβλήματα

24. Τι είναι εξίσωση, τι λύση (ή ρίζα) μιας εξίσωσης και τι επίλυση μιας εξίσωσης;

- ♦ Η εξίσωση είναι μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα άγνωστο (μια μεταβλητή). Λύση (ή ρίζα) μιας εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον αγνώστο, επαληθεύει την ισότητα.
- ♦ Επίλυση μιας εξίσωσης είναι η διαδικασία που κάνουμε για να βρούμε την λύση (ρίζα) της.

25. Πως λύνονται οι εξισώσεις, $x + \alpha = \beta$, $x - \alpha = \beta$, $\alpha - x = \beta$, $\alpha \cdot x = \beta$, $x : \alpha = \beta$, $\alpha : x = \beta$
 βάσει των ορισμών των πράξεων ;

Βάσει των ορισμών των πράξεων

- ♦ η εξίσωση $x + \alpha = \beta$ έχει λύση την $x = \beta - \alpha$
- ♦ η εξίσωση $x - \alpha = \beta$ έχει λύση την $x = \beta + \alpha$
- ♦ η εξίσωση $\alpha - x = \beta$ έχει λύση την $x = \alpha - \beta$
- ♦ η εξίσωση $\alpha \cdot x = \beta$ έχει λύση την $x = \beta : \alpha$
- ♦ η εξίσωση $x : \alpha = \beta$ έχει λύση την $x = \alpha \cdot \beta$
- ♦ η εξίσωση $\alpha : x = \beta$ έχει λύση την $x = \alpha : \beta$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Ποσοστά

26. Τι ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό η απλά ποσοστό και τι ποσοστό επί τοις χιλίοις;

- ♦ Ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό η απλά ποσοστό το σύμβολο $\alpha \% = \frac{\alpha}{100}$
- ♦ Ονομάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις το σύμβολο $\alpha \text{‰} = \frac{\alpha}{1000}$

προσοχή στα παρακάτω !

Πώς
υπολογίζουμε το
ποσοστό $\alpha\%$ ενός
αριθμού β ;



Πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με το
ποσοστό, δηλαδή: $\beta \cdot \frac{\alpha}{100}$.

Πως τρέπουμε
ένα κλάσμα σε
ποσοστό



Τα κλάσματα μπορούν να γραφτούν και
σαν ποσοστά, αρκεί να κάνουμε τη
διαίρεση και να πολλαπλασιάσουμε με το
100. πχ. $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

27. Τι είναι τα πρόσσημα και πως χαρακτηρίζονται οι αριθμοί από αυτά;

Τα σύμβολα «+» και «-» που λέγονται **πρόσημα**, γράφονται πριν από τους αριθμούς και τους χαρακτηρίζουν, αντίστοιχα, ως **θετικούς** ή **αρνητικούς**. Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

28. Πότε δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται ομόσημοι και πότε ετερόσημοι;

Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται **ομόσημοι** όταν έχουν το ίδιο πρόσημο και **ετερόσημοι** όταν έχουν διαφορετικό πρόσημο.

29. Ποιοι είναι οι ακέραιοι και ποιοι οι ρητοί αριθμοί;

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

30. Τι εκφράζει η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a και πως συμβολίζεται;

Η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή **O** του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

31. Πότε δύο ρητοί αριθμοί λέγονται αντίθετοι;

Δύο αριθμοί ονομάζονται **αντίθετοι** όταν είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

32. Ποιος είναι ο αντίθετος του αριθμού x ;

Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.

33. Πως ορίζεται η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού;

♦ Η απόλυτη τιμή ενός θετικού ρητού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- ♦ Η **απόλυτη τιμή** ενός **αρνητικού ρητού αριθμού** είναι ο **αντίθετος** του.
- ♦ Η **απόλυτη τιμή** του **μηδενός** είναι το **μηδέν**.

34. Πως προσθέτουμε δύο ρητούς αριθμούς;

- ♦ Για να **προσθέσουμε** δύο **ομόσημους ρητούς αριθμούς**, **προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημο τους.
- ♦ Για να **προσθέσουμε** δύο **ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, **αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

35. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης των ρητών

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης των ρητών είναι:

- ♦ Η **αντιμεταθετική** ιδιότητα σύμφωνα με την οποία μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά δύο προσθετέων ενός αθροίσματος.

$$\text{Δηλαδή αν οι } \alpha, \beta \text{ είναι ρητοί αριθμοί τότε } \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

- ♦ Η **προσεταιριστική** ιδιότητα σύμφωνα με την οποία αν έχουμε ένα άθροισμα τριών προσθετέων α, β, γ ισχύει $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

- ♦ Το άθροισμα ενός ρητού αριθμού με το μηδέν ισούται με τον ίδιο τον ρητό.

$$\text{Δηλαδή αν ο } \alpha \text{ είναι ρητός } \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

- ♦ Το άθροισμα δύο αντίθετων ρητών είναι μηδέν

$$\text{Δηλαδή αν ο } \alpha \text{ και ο } -\alpha \text{ είναι αντίθετοι ρητοί } \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$$

36. Πως αφαιρούμε δύο ρητούς αριθμούς;

Για να **αφαιρέσουμε** από το ρητό αριθμό α το ρητό αριθμό β , **προσθέτουμε** στον α τον **αντίθετο** του β .

$$\text{Δηλαδή αν οι } \alpha, \beta \text{ είναι ρητοί αριθμοί τότε } \alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

37. Πως πολλαπλασιάζουμε δύο ρητούς αριθμούς;

Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ομόσημους ρητούς αριθμούς**, **πολλαπλασιάζουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ετερόσημους ρητούς αριθμούς**, **πολλαπλασιάζουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-».

38. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των ρητών ;

Οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των ρητών είναι:

- ♦ Η **αντιμεταθετική** ιδιότητα σύμφωνα με την οποία μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά δύο παραγόντων ενός γινομένου.

$$\text{Δηλαδή αν οι } \alpha, \beta \text{ είναι ρητοί αριθμοί τότε } \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

- ♦ Η **προσεταιριστική** ιδιότητα σύμφωνα με την οποία αν έχουμε ένα γινόμενο τριών παραγόντων α, β, γ ισχύει $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

- ♦ Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού με τη μονάδα ισούται με τον ίδιο τον ρητό.

$$\text{Δηλαδή αν ο } \alpha \text{ είναι ρητός } \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

- ♦ Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{και} \quad \alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

- ♦ Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού επί το μηδέν ισούται με το μηδέν.

$$\text{Δηλαδή αν ο } \alpha \text{ είναι ρητός } \alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$$

39. Πότε δύο ρητοί αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

- ♦ Δύο ρητοί αριθμοί α, β λέγονται αντίστροφοι όταν το γινόμενό τους είναι ίσο με την μονάδα.
- ♦ Ο καθένας από τους α και β είναι αντίστροφος του άλλου.

40. Πως διαιρούμε δύο ρητούς αριθμούς;

- Για να διαιρέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «+».
- Για να διαιρέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «-».

41. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διαίρεσης των ρητών ;

- ♦ Το πηλίκο της διαίρεσης $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται **λόγος του α προς το β** και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\beta \cdot x = \alpha.$$

- ♦ Η διαίρεση $\frac{\alpha}{\beta}$ μπορεί και να γραφεί $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, επομένως για να διαιρέσουμε δύο ρητούς

αριθμούς, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

- ♦ Διάρθρωση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

42. Τι ονομάζεται δύναμη με βάση το ρητό αριθμό a , και εκθέτη το φυσικό αριθμό $n > 1$ και πως συμβολίζεται;

Ονομάζεται δύναμη με βάση το ρητό αριθμό a , και εκθέτη το φυσικό αριθμό $n > 1$ και συμβολίζεται με a^n , το γινόμενο n παραγόντων ίσων με το a .

Δηλαδή αν ο a είναι ρητός και ο n φυσικός με $n > 1$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$

43. Ποιο είναι το πρόσημο της δύναμης a^n με βάση το ρητό αριθμό a , και εκθέτη το φυσικό αριθμό $n > 1$ για τις διάφορες τιμές του a ;

- ♦ Η δύναμη a^n με βάση a θετικό ρητό και εκθέτη φυσικό $n > 1$, είναι θετικός αριθμός.

Δηλαδή, αν $a > 0$, τότε $a^n > 0$

- ♦ Η δύναμη a^n με βάση a αρνητικό ρητό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.

Δηλαδή αν $a < 0$ και n άρτιος τότε $a^n > 0$

- ♦ Η δύναμη a^n με βάση a αρνητικό ρητό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

Δηλαδή, αν $a < 0$ και n περιττός, τότε $a^n < 0$

44. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό ;

■ Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

Δηλαδή, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

- ♦ Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

Δηλαδή, $a^m : a^n = a^{m-n}$

- ♦ Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

Δηλαδή, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

- ♦ Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\text{Δηλαδή, } (\alpha : \beta)^v = \alpha^v : \beta^v$$

- ♦ Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$\text{Δηλαδή, } (\alpha^u)^v = \alpha^{u \cdot v}$$

45. Πως συγκρίνουμε δύο ρητούς αριθμούς ;

- Γενικά, ισχύει ότι και για τους φυσικούς, δηλαδή :
- Όσο δεξιότερα, πάνω στον άξονα, βρίσκεται ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι.
- Ειδικότερα για τους ρητούς:
 - Από δύο **θετικών** αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει τη **μεγαλύτερη** απόλυτη τιμή.
 - Από δύο **αρνητικών** αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει τη **μικρότερη** απόλυτη τιμή.
 - Από έναν θετικό και έναν αρνητικό αριθμό μεγαλύτερος είναι πάντα ο θετικός.

Προσοχή στα παρακάτω !

κανόνας προσήμων
πολλαπλασιασμού



$$\begin{array}{ll} (+) \cdot (+) = + & (+) \cdot (-) = - \\ (-) \cdot (-) = + & (-) \cdot (+) = - \end{array}$$

κανόνας προσήμων
διαίρεσης



$$\begin{array}{ll} (+) : (+) = + & (+) : (-) = - \\ (-) : (-) = + & (-) : (+) = - \\ - & \end{array}$$

ιδιότητες των δυνάμεων ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό;

1. $\alpha^u \cdot \alpha^v = \alpha^{u+v}$	Γινόμενο δυνάμεων με την ίδιο βάση.
2. $\frac{\alpha^u}{\alpha^v} = \alpha^{u-v}$	Πηλίκο δυνάμεων με την ίδιο βάση.
3. $(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$	Γινόμενο σε δύναμη.
4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}$	Πηλίκο σε δύναμη.
5. $(\alpha^u)^v = \alpha^{u \cdot v}$	Δύναμη σε δύναμη.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

1. Τι ονομάζεται ευθεία και ποιες προτάσεις αναφέρονται σ' αυτή;

Ονομάζεται ευθεία το σχήμα που προκύπτει αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα απεριόριστα και προς τα δύο άκρα του.

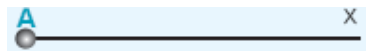
Στην ευθεία αναφέρονται οι επόμενες προτάσεις:

- ♦ Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.
- ♦ Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.

Τα σχήματα δίνονται για εμπέδωση των εννοιών και δεν είναι απαραίτητο να γίνονται στις εξετάσεις. Εκτός και αν το ζητά ο διδάσκων καθηγητής!

2. Τι ονομάζεται ημιευθεία;

Ονομάζεται ημιευθεία το σχήμα που προκύπτει αν προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα απεριόριστα προς το ένα άκρο του.



3. Ποιες ημιευθείες ονομάζονται αντικείμενες;

Ονομάζονται αντικείμενες ημιευθείες οι δύο ημιευθείες στις οποίες χωρίζει ένα σημείο μιας ευθείας την ευθεία.



4. Τι είναι το επίπεδο και ποιες προτάσεις αναφέρονται σ' αυτό;

Επίπεδο είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή.

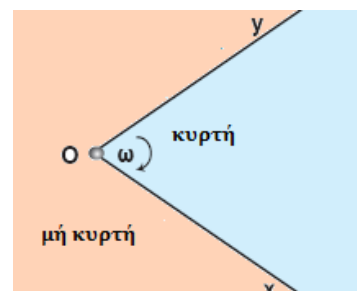
- ♦ Στο επίπεδο αναφέρονται οι επόμενες προτάσεις:
- ♦ Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα.
- ♦ Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο.
- ♦ Από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.
- ♦ Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη, ώστε, αν θέλουμε να περάσουμε από το ένα μέρος του χώρου στο άλλο, πρέπει να διαπεράσουμε το επίπεδο.

5. Τι ονομάζεται ημιεπίπεδο;

Ημιεπίπεδο ονομάζεται καθένα από τα δύο μέρη που μια ευθεία ενός επιπέδου χωρίζει το επίπεδο μαζί με την ημιευθεία αυτή.

6. Τι ονομάζεται γωνία, κυρτή γωνία, μη κυρτή γωνία;

- Ονομάζεται γωνία καθεμία από τις δύο περιοχές του επιπέδου που περιέχονται ανάμεσα σε δύο ημιευθείες με κοινή αρχή μαζί με τις ημιευθείες αυτές.
- Η **μικρότερη** από τις δύο γωνίες που σχηματίζονται με τον παραπάνω τρόπο ονομάζεται **κυρτή** και η **μεγαλύτερη μη κυρτή** γωνία.



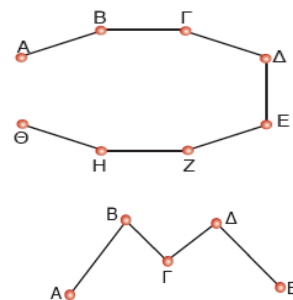
7. Ποια γραμμή ονομάζεται τεθλασμένη;

Τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία.

8. Πότε μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται κυρτή και πότε μη κυρτή;

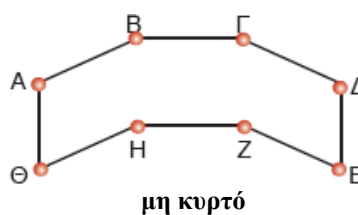
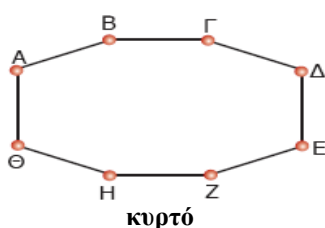
- Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **κυρτή**, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Διαφορετικά λέγεται μη κυρτή.



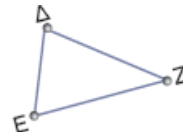
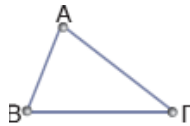
9. Τι ονομάζεται ευθύγραμμο σχήμα;

Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.



10. Πότε δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα;

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται ίσα, **αν συμπίπτουν**, όταν τοποθετηθούν το ένα επάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο.



11. Ποια είναι τα αντίστοιχα στοιχεία σε δύο ίσα ευθύγραμμα σχήματα ;

Στα ίσα σχήματα, τα στοιχεία που συμπίπτουν, δηλαδή οι κορυφές, οι πλευρές και οι γωνίες, ονομάζονται αντίστοιχα στοιχεία των σχημάτων αυτών.

12. Τι ονομάζεται απόσταση δύο σημείων;

Ονομάζεται απόσταση δύο σημείων το **μήκος του ευθυγράμμου τμήματος** που ενώνει τα σημεία αυτά.

13. Τι ονομάζεται μέσο ευθυγράμμου τμήματος;

Ονομάζεται μέσο ευθυγράμμου τμήματος **το σημείο M** που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα τμήματα.



14. Τι ονομάζεται μέτρο γωνίας;

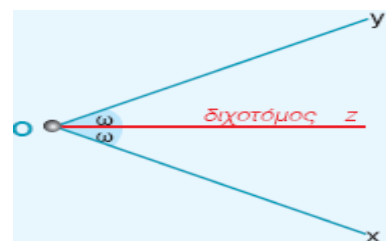
Ονομάζεται μέτρο μιας γωνίας ο αριθμός που προκύπτει από τη μέτρηση της από τη σύγκριση της δηλαδή με μια άλλη γωνία που τη θεωρούμε ως μονάδα.

15. Ποια είναι η μονάδα μέτρησης των γωνιών;

Η μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η μοίρα που γράφεται 1° .

16. Τι ονομάζεται διχοτόμος μιας γωνίας;

Ονομάζεται διχοτόμος μιας γωνίας η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και χωρίζει την γωνία αυτή σε δύο ίσα μέρη.



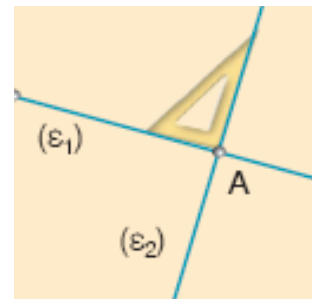
17. Ποια γωνία ονομάζεται:

i) ορθή, ii) οξεία, iii) αμβλεία, iv) ευθεία, v) μηδενική, vi) πλήρης ;

- I. Ονομάζεται ορθή γωνία η γωνία της οποίας το μέτρο είναι 90° . Οι πλευρές μιας ορθής γωνίας είναι κάθετες.
- II. Ονομάζεται οξεία γωνία, η γωνία της οποία το μέτρο είναι μικρότερο από 90° .
- III. Ονομάζεται αμβλεία γωνία, η γωνία της οποία το μέτρο είναι μεγαλύτερο από 90° .
- IV. Ονομάζεται ευθεία γωνία, η γωνία της οποίας το μέτρο είναι 180° . Οι πλευρές μιας ευθείας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες.
- V. Ονομάζεται μηδενική γωνία, η γωνία της οποίας το μέτρο είναι 0° . Οι πλευρές μιας μηδενικής γωνίας ταυτίζονται.
- VI. Ονομάζεται πλήρης γωνία, η γωνία της οποίας το μέτρο είναι 360° . Οι πλευρές μιας πλήρους γωνίας ταυτίζονται.

18. Πότε δύο ευθείες είναι κάθετες και πως συμβολίζεται η καθετότητα τους;

- ♦ Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες, που σχηματίζουν αυτές τεμνόμενες, είναι ορθές.
- ♦ Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες ε_1 , και ε_2 είναι κάθετες, χρησιμοποιούμε το σύμβολο ($\perp$), γράφουμε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ και διαβάζουμε: “η ε_1 είναι κάθετη στην ε_2 ”.

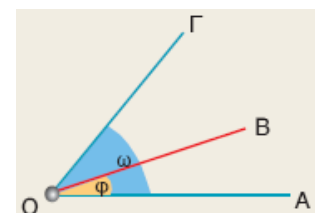


19. Πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα (ή δύο ημιευθείες) λέγονται κάθετα;

Δύο ευθύγραμμα τμήματα (ή δύο ημιευθείες) που βρίσκονται πάνω σε δύο κάθετες ευθείες, λέγονται κάθετα ευθύγραμμα τμήματα (ή κάθετες ημιευθείες).

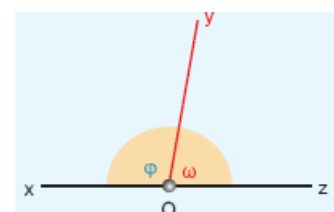
20. Πότε δύο γωνίες ονομάζονται εφεξής;

Ονομάζονται εφεξής δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή, μια κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο.



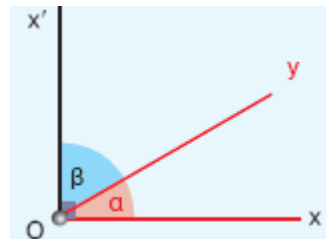
21. Πότε δύο γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές ;

Ονομάζονται παραπληρωματικές δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .



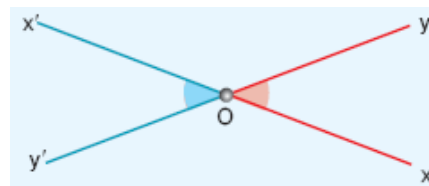
22. Πότε δύο γωνίες ονομάζονται συμπληρωματικές ;

Ονομάζονται συμπληρωματικές δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° .



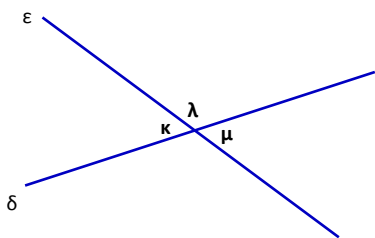
23. Πότε δύο γωνίες ονομάζονται κατακορυφήν ;

Ονομάζονται κατακορυφήν δύο γωνίες που οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.



24. Να αποδείξετε ότι οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Απόδειξη



Έχουμε, $\hat{\kappa} + \hat{\lambda} = 180^\circ$ (1) και $\hat{\mu} + \hat{\lambda} = 180^\circ$ (2)

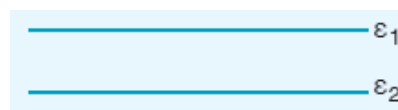
Στις ισότητες (1) και (2) παρατηρούμε ότι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα άρα και τα πρώτα θα είναι ίσα.

$$\text{Δηλαδή : } \hat{\kappa} + \hat{\lambda} = \hat{\mu} + \hat{\lambda}$$

$$\text{ή } \hat{\kappa} = \hat{\mu} \quad \text{Ιδιότητα διαγραφής)}$$

25. Πότε δύο ευθείες του επιπέδου ονομάζονται παράλληλες;

Ονομάζονται παράλληλες δύο ευθείες του επιπέδου που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



26. Πως συμβολίζεται η παραλληλία δύο ευθειών ϵ_1 , ϵ_2 ;

Όταν οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 είναι παράλληλες γράφουμε $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$

27. Πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα λέμε ότι είναι παράλληλα;

Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέμε ότι είναι παράλληλα όταν βρίσκονται πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες.

28. Πότε δύο ευθείες του επιπέδου ονομάζονται τεμνόμενες;

Ονομάζονται τεμνόμενες δύο ευθείες του επιπέδου που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. Το κοινό σημείο δύο τεμνομένων ευθειών λέγεται σημείο τομής.

29. Τι ονομάζεται απόσταση σημείου από ευθεία;

Ονομάζεται απόσταση σημείου από ευθεία το μήκος του κάθετου ευθυγράμμου τμήματος από το σημείο προς την ευθεία.

30. Τι ονομάζεται απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών;

Ονομάζεται απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις παράλληλες και έχει τα άκρα τους' αυτές.

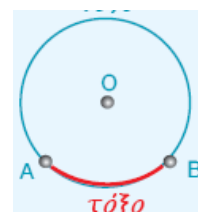
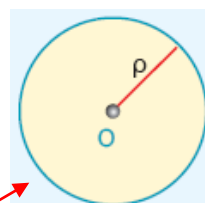
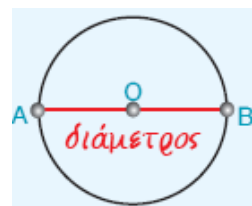
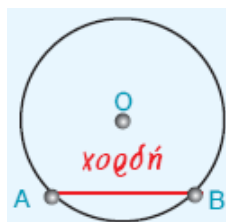
31. Τι ονομάζεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ ;

Ονομάζεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ το επίπεδο σχήμα που όλα τα σημεία του απέχουν από το O απόσταση ίση με το ρ .



32. Τι ονομάζεται: i) Χορδή ii) Διάμετρος iii) Τόξο ενός κύκλου;

- ☞ Ονομάζεται **χορδή** κύκλου το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία του κύκλου.
- ☞ Ονομάζεται **διάμετρος** κύκλου κάθε χορδή που περνά από το κέντρο του.
- ☞ Μια διάμετρος κύκλου είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη χορδή του κύκλου και τον χωρίζει σε δύο **ίσα μέρη** που λέγονται ημικύκλια.
- ☞ Ονομάζεται **τόξο** κύκλου το μέρος του κύκλου που περιέχεται μεταξύ δύο σημείων του.



33. Τι ονομάζεται κυκλικός δίσκος με κέντρο O και ακτίνα ρ ;

Ονομάζεται κυκλικός δίσκος με κέντρο O και ακτίνα ρ το μέρος του επιπέδου που περιέχεται μέσα σ' έναν κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ μαζί με τον κύκλο αυτόν.

34. Πότε μια ευθεία λέμε ότι είναι εξωτερική ενός κύκλου;

Όταν ευθεία και κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέμε ότι η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου. (37/ Α)

35. Πότε μια ευθεία λέγεται εφαπτόμενη ενός κύκλου;

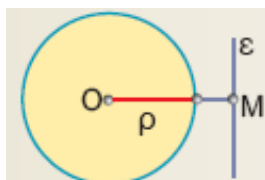
Όταν ευθεία και κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο **M**, η ευθεία λέγεται εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο **M**. (σχήμα 37/ Β)

36. Πότε μια ευθεία λέγεται τέμνουσα ενός κύκλου ;

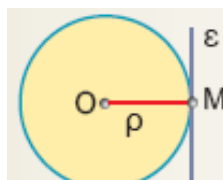
Όταν ευθεία και κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία **A** και **B**, η ευθεία λέγεται τέμνουσα του κύκλου ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα **A** και **B** (σχήμα 37/ Γ)

37. Ποιες οι σχετικές θέσεις μιας ευθείας ε και ενός κύκλου (O, ρ);

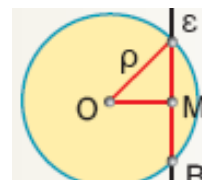
- ♦ Όταν η απόσταση OM του κέντρου O του κύκλου από την ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ ($OM > \rho$), η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου. (σχήμα Α)
- ♦ Όταν η απόσταση OM του κέντρου O του κύκλου από την ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα ρ ($OM = \rho$), η ευθεία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο **M**. (σχήμα Β)
- ♦ Όταν η απόσταση OM του κέντρου O του κύκλου από την ευθεία ε είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ ($OM < \rho$), η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου. (σχήμα Γ)



σχήμα Α

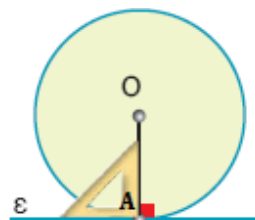


σχήμα Β

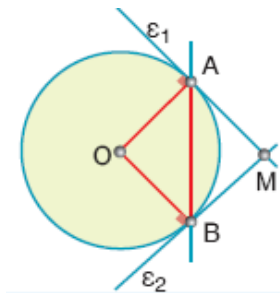


σχήμα Γ

38. Κύκλος και εφαπτόμενες



Σε ένα σημείο **A** του κύκλου, μπορώ να φέρω μόνο μία εφαπτόμενη

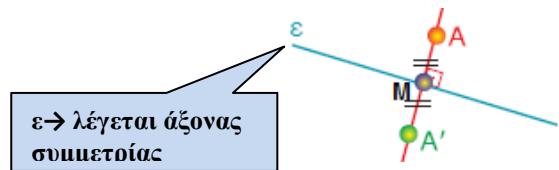


Από ένα εξωτερικό σημείο **M** του κύκλου, άγονται δύο εφαπτόμενες. Τα δε εφαπτόμενα ευθ, τμήματα είναι ίσα, δηλαδή **MA=MB**

38. Πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία ε ;

Τα A, A' είναι **συμμετρικά** ως προς την ευθεία (ε) ,αν διπλώνοντας το σχήμα πάνω στην ευθεία ,το A συμπίπτει με το A' .

Η ε είναι κάθετη στο μέσο M του AA' .(μεσοκάθετος)

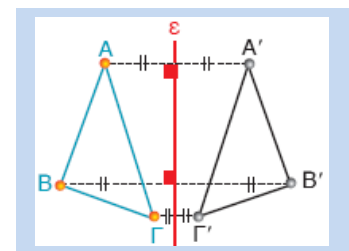
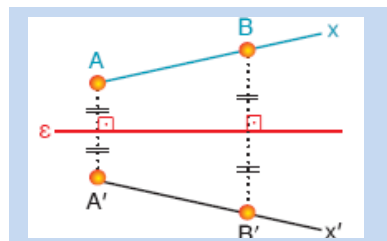
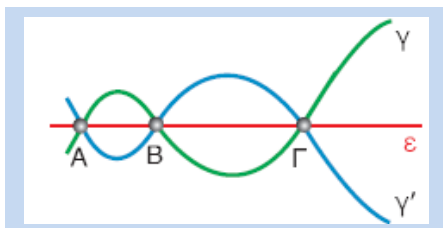
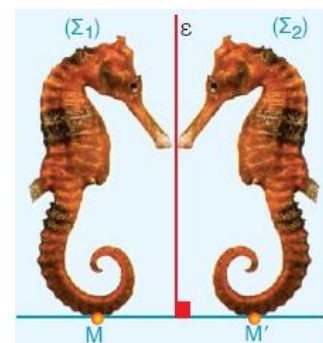


39. Πότε δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία ε ;

Δύο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται συμμετρικά ως προς μία ευθεία ε , όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ε .

Επειδή με δίπλωση κατά μήκος της ε συμπίπτει το (Σ_1) με το (Σ_2), γνωρίζουμε ότι αυτά θα είναι ίσα. Επομένως:

Τα συμμετρικά σχήματα ως προς ευθεία είναι ίσα.



40. Τι ονομάζεται μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος και ποιες είναι οι ιδιότητες της ;

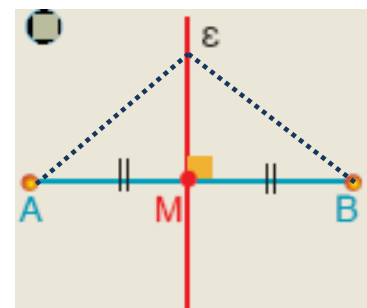
Ονομάζεται μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος BB' η ευθεία που είναι κάθετη σ' αυτό και περνά από τα ο μέσο του.



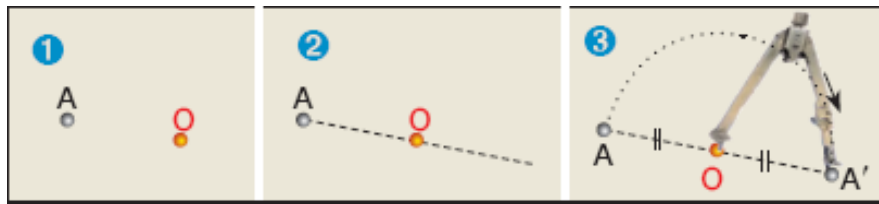
41. Ποιες είναι οι ιδιότητες της μεσοκαθέτου ενός ευθ. τμήματος ;

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος

- ◆ ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.
- ◆ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.
- ◆ Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος είναι άξονας συμμετρίας του.



42. Πότε δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο O ; Πως βρίσκω το συμμετρικό A' ενός σημείου A ως προς κέντρο συμμετρίας το O ;



- Δύο σημεία A, A' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας το O ,όταν το O είναι **μέσο** του ευθ. τμήματος AA' .
- Για να κατασκευάσουμε το συμμετρικό A ενός σημείου A ως προς σημείο O , φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα AO και στην προέκτασή του (με το υποδεκάμετρο ή με τον διαβήτη) παίρνουμε ίσο τμήμα $OA' = OA$, όπως δείχνουν οι παραπάνω εικόνες.

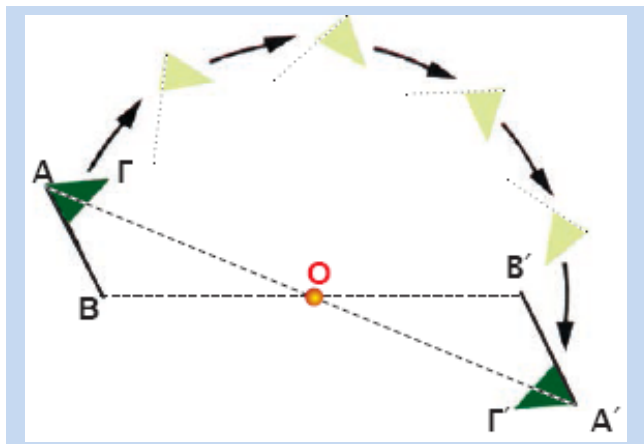
43. Πότε δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο O ;

1^{ος} ορισμός

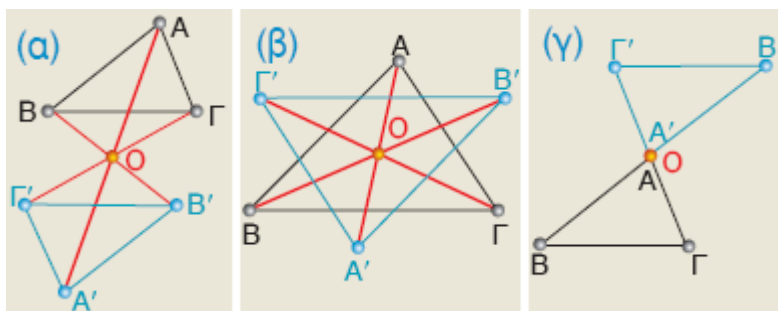
Όταν όλα τα σημεία του δεύτερου σχήματος είναι συμμετρικά ,ως προς το O των σημείων του πρώτου σχήματος .

2^{ος} ορισμός

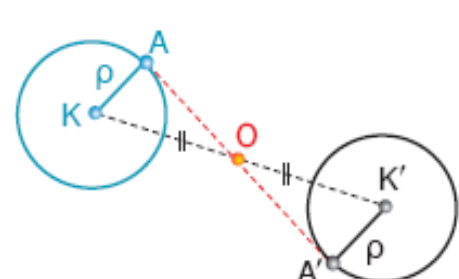
Όταν το δεύτερο σχήμα προκύπτει από πρώτο σχήμα ,αν το περιστρέψουμε κατά 180° .



44. Βασικά σχήματα που έχουν κέντρο συμμετρίας το O .



Τρίγωνα με κέντρο συμμετρίας



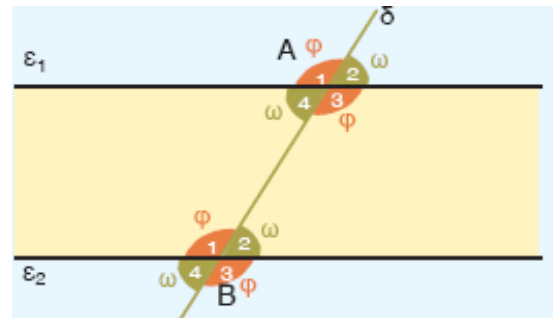
Κύκλοι με κέντρο συμμετρίας

45. Ποιες είναι οι ιδιότητες δύο παραλλήλων ευθειών που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία;

Δύο **παράλληλες** ευθείες που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία σχηματίζουν:

- ♦ Τις **εντός εναλλάξ** γωνίες ίσες
- ♦ Τις **εντός εκτός και επί τα αυτά** γωνίες ίσες .
- ♦ Τις **εντός και επί τα αυτά** γωνίες παραπληρωματικές.

Δηλαδή



☞ $A_4 = B_2$, $A_3 = B_1$ (εντός εναλλάξ γωνίες ίσες)

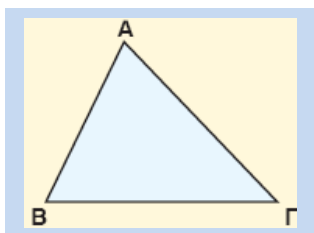
☞ $A_2 = B_2$, $A_1 = B_1$, $A_3 = B_3$, $A_4 = B_4$ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες)

☞ $A_3 + B_2 = 180^\circ$, $A_4 + B_1 = 180^\circ$ (εντός και επί τα αυτά γωνίες παραπληρωματικές)

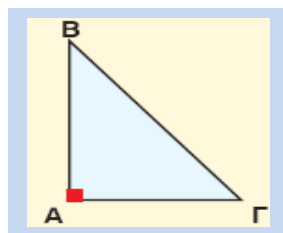
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Τρίγωνα – Παρ/μα - Τραπέζια

46. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται i) οξυγώνιο ii) ορθογώνιο iii) αμβλυγώνιο ;

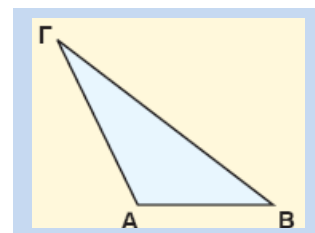
- ♦ Ονομάζεται οξυγώνιο το τρίγωνο που όλες οι γωνίες του είναι οξείες.
- ♦ Ονομάζεται ορθογώνιο το τρίγωνο που μια γωνία του είναι ορθή.
- ♦ Ονομάζεται αμβλυγώνιο το τρίγωνο που μια γωνία του είναι αμβλεία.



οξυγώνιο



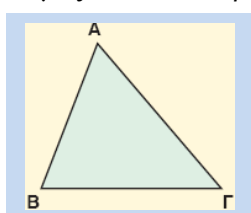
ορθογώνιο



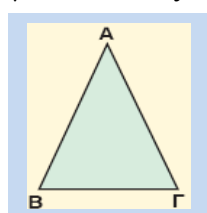
αμβλυγώνιο

47. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται: i) σκαληνό ii) ισοσκελές iii) ισόπλευρο ;

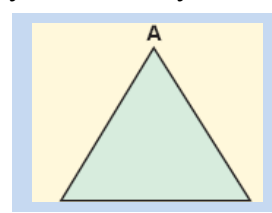
- ♦ Ονομάζεται σκαληνό το τρίγωνο που όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
- ♦ Ονομάζεται ισοσκελές το τρίγωνο που οι δύο πλευρές του είναι ίσες.
- ♦ Ονομάζεται ισόπλευρο το τρίγωνο που όλες οι πλευρές του είναι ίσες.



σκαληνό



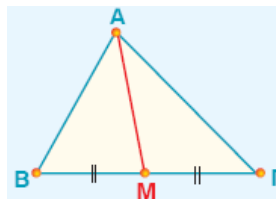
ισοσκελές



ισόπλευρο

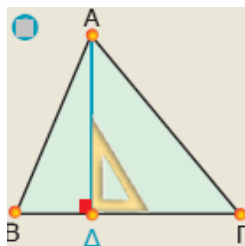
48. Τι ονομάζεται διάμεσος ενός τριγώνου;

Ονομάζεται διάμεσος ενός τριγώνου το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι της πλευράς.



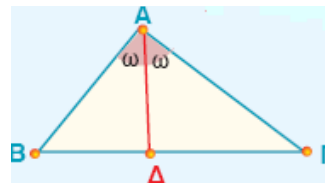
49. Τι ονομάζεται ύψος ενός τριγώνου;

Ονομάζεται ύψος ενός τριγώνου το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.



50. Τι ονομάζεται διχοτόμος μιας γωνίας ;

Ονομάζεται διχοτόμος μιας γωνίας η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και χωρίζει την γωνία αυτή σε δύο ίσα μέρη.



51. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ABΓ είναι 180°.

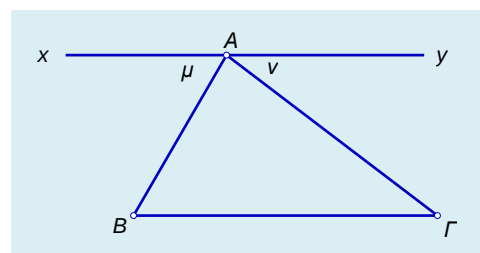
Απόδειξη

Θεωρούμε το τρίγωνο ABΓ. Από το A φέρνουμε ευθεία $xy \parallel B\Gamma$. Έχουμε τότε

$$\hat{A} + \hat{\mu} + \hat{\nu} = 180^\circ \quad (1)$$

Οι γωνίες μ , B και οι γωνίες ν , Γ είναι αντίστοιχα εντός εναλλάξ, άρα έχουμε $\hat{\mu} = \hat{B}$ (2) και $\hat{\nu} = \hat{\Gamma}$ (3)

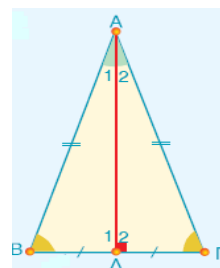
Στην (1) αντικαταστήσουμε τις γωνίες μ , ν με τις ίσες τους B, Γ και έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$



52. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου ;

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:

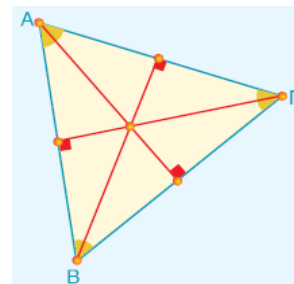
- ♦ Η ευθεία της διαμέσου, που αντιστοιχεί στη βάση είναι άξονας συμμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου.
- ♦ Η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- ♦ Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς είναι ίσες.



53. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοπλεύρου τριγώνου ;

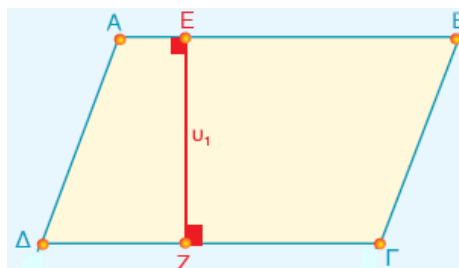
Σε κάθε ισοπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

- ◆ Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.
- ◆ Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- ◆ Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.



54. Τι ονομάζεται παραλληλόγραμμο και ποια είναι τα στοιχεία του;

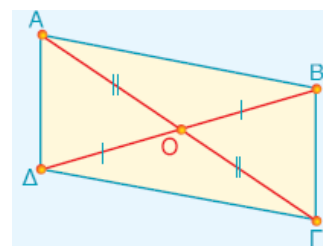
- ◆ Ονομάζεται **παραλληλόγραμμο** το τετράπλευρο του οποίου ανά δύο οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.
- ◆ Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **Βάση** του παραλληλογράμμου.
- ◆ Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.



55. Ποιες είναι οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου ;

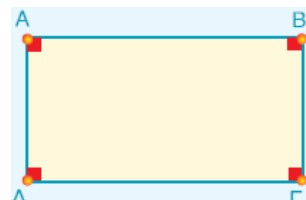
Σε κάθε παραλληλόγραμμο:

- ◆ Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.
- ◆ Οι διαγώνιες του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).
- ◆ Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.
- ◆ Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.



56. Τι ονομάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ;

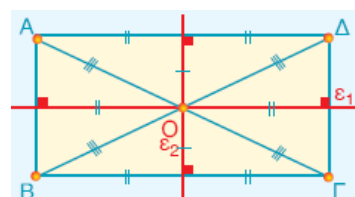
Ονομάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.



57. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ορθογωνίου;

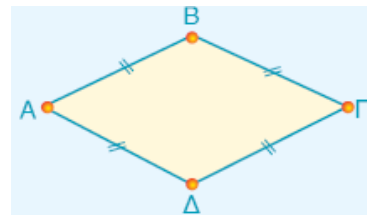
Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο:

- ◆ Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- ◆ Οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται.



58. Τι ονομάζεται ρόμβος;

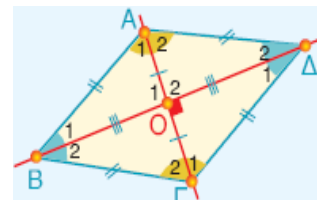
Ονομάζεται ρόμβος το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



59. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ρόμβου;

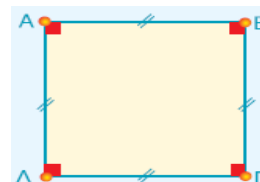
Ο ρόμβος έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και ακόμα τις επόμενες:

- ◆ Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας.
- ◆ Οι διαγωνίες είναι κάθετες (και διχοτομούνται).
- ◆ Οι διαγωνίες του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.



60. Τι ονομάζεται τετράγωνο

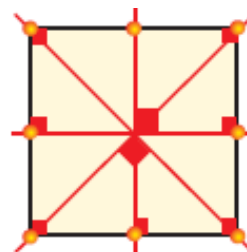
Ονομάζεται τετράγωνο το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ορθές.



61. Ποιες είναι οι ιδιότητες του τετραγώνου ;

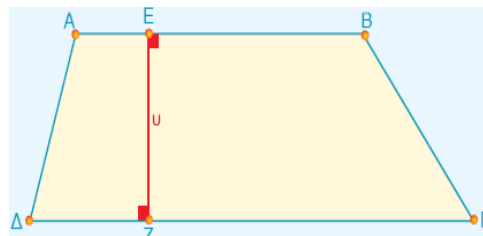
Το τετράγωνο έχει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και ακόμα τις επόμενες:

- ◆ Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- ◆ Οι διαγωνίες του είναι ίσες, κάθετες (και διχοτομούνται).
- ◆ Οι διαγωνίες του είναι και διχοτόμοι των γωνιών πκ.



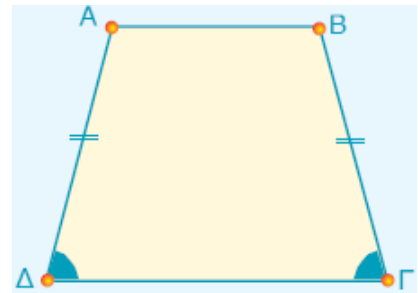
62. Τι ονομάζεται τραπέζιο και ποια είναι τα στοιχεία του ;

- ◆ Ονομάζεται τραπέζιο το τετράπλευρο του οποίου δύο πλευρές είναι παράλληλες.
- ◆ Οι παράλληλες πλευρές του τραpezίου λέγονται βάσεις του τραpezίου.
- ◆ Η απόσταση των βάσεων λέγεται ύψος του τραpezίου.



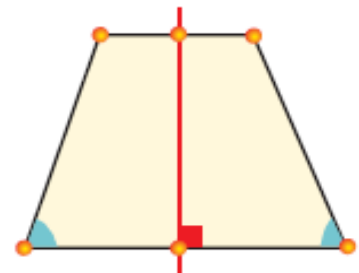
63. Τι ονομάζεται ισοσκελές τραπέζιο;

Ονομάζεται ισοσκελές τραπέζιο το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.



64. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου ;

- ♦ Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.
- ♦ Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- ♦ Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες



ΑΛΓΕΒΡΑ

1.

θεωρία

- α) Πότε ένας αριθμός λέγεται πρώτος και πότε σύνθετος;
 β) Αναφέρατε τα κριτήρια διαιρετότητας i) με το 5 και ii) με το 3
 γ) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά :
 i) $\alpha \cdot 1 = \dots$
 ii) $\alpha + \dots = \alpha$
 iii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \dots + \dots$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Ένας αριθμός λέγεται πρώτος όταν διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και την μονάδα, και σύνθετος όταν δεν είναι πρώτος.
 β) Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5 όταν τελειώνει σε 0 ή 5 και διαιρείται με το 3 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.
 γ) Συμπληρωμένα τα κενά : i) $\alpha \cdot 1 = \alpha$
 ii) $\alpha + 0 = \alpha$
 iii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

2.

θεωρία

- α) Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους ; Γράψτε δύο πρώτους μεταξύ τους αριθμούς
 β) Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά
 i) Ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν
 ii) Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν
 γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες
 i) Ο αριθμός $24\alpha\beta 0$ διαιρείτε με το 2
 ii) Ο αριθμός $1\alpha 34$ διαιρείτε με το 4
 iii) Η ισότητα $583 = 145 \cdot 4 + 3$ είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Δύο αριθμοί λέγονται πρώτοι μεταξύ τους όταν έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1.

Δύο πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί είναι το 3 και το 5

β) Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παρακάτω

i) Ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν **το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9**

ii) Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν **τελειώνει σε 0 ή 5**

γ) Με βάση τους σχετικούς ορισμούς έχουμε

i) Η πρόταση είναι **σωστή (Σ)** δεδομένου ότι ο αριθμός τελειώνει σε 0, άρα διαιρείται με το 2

ii) Η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)** δεδομένου ότι το 34 δεν διαιρείται με το 4

iii) Η πρόταση είναι σωστή **(Σ)** δεδομένου ότι $3 < 4$ και $3 < 145$, πράγμα που σημαίνει ότι η ισότητα παριστάνει Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο το 583, διαιρέτη το 145, πηλίκο το 4 και υπόλοιπο το 3 και Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο το 583, διαιρέτη το 4, πηλίκο το 145 και υπόλοιπο το 3

3.

Θεωρία

α) Ποια κλάσματα ονομάζονται ομώνυμα και ποια ετερόνυμα ;

β) Ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι ;

γ) Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά

i) Ονομάζουμε σύνθετο κλάσμα ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον όρος είναι επίσης

ii) Από δύο ομώνυμα κλάσματα με όρους φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει

iii) Ένα κλάσμα με όρους φυσικούς αριθμούς είναι μεγαλύτερο από το 1 όταν ο είναι μεγαλύτερος από τον

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ομώνυμα ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή ενώ ετερόνυμα αυτά που έχουν διαφορετικό παρονομαστή.

β) Αντίστροφοι ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν γινόμενο 1

γ) Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παρακάτω

i) Ονομάζουμε σύνθετο κλάσμα ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον όρος είναι επίσης **κλάσμα**

ii) Από δύο ομώνυμα κλάσματα με όρους φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει **μεγαλύτερο αριθμητή**

iii) Ένα κλάσμα με όρους φυσικούς αριθμούς είναι μεγαλύτερο από το 1 όταν ο **αριθμητής του** είναι μεγαλύτερος από τον **παρονομαστή**

- α) Τι ονομάζουμε εξίσωση με έναν άγνωστο x ;
 β) Τι ονομάζουμε λύση και τι επίλυση μιας εξίσωσης .
 γ) Να αντιστοιχίσετε τις προτάσεις της στήλης Α με τις μαθηματικές παραστάσεις της στήλης Β

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 2	α. $5x$
2. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 4	β. $x + 4 = 7$
3. Ένας αριθμός αυξημένος κατά 4 ισούται με το 7	γ. $3x - 2$
4. Το πενταπλάσιο ενός αριθμού	δ. $x + y = 4$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Ονομάζουμε εξίσωση με έναν άγνωστο x κάθε ισότητα η οποία περιέχει αριθμούς και τον άγνωστο x .
 β) Ονομάζουμε λύση της εξίσωσης την τιμή η οποία αν αντικαταστήσει τον άγνωστο επαληθεύεται η εξίσωση .
 Η διαδικασία με την βοήθεια της οποίας βρίσκουμε την λύση της εξίσωσης ονομάζεται επίλυση της εξίσωσης.
 γ) Οι αντιστοιχίσεις είναι $1 \rightarrow \gamma$, $2 \rightarrow \delta$, $3 \rightarrow \beta$, $4 \rightarrow \alpha$

Τα μηνιαία έσοδα μιας οικογένειας είναι 2800 € και οι μηνιαίες δαπάνες κατανέμονται ως εξής : Το 40% ξοδεύεται για φαγητό , το 20% για νοίκι , το $\frac{1}{28}$ για ρουχισμό , το $\frac{1}{25}$ για διασκέδαση και τα υπόλοιπα αποταμιεύονται .

- α) Να βρείτε πόσα χρήματα ξοδεύει η οικογένεια για κάθε κατηγορία δαπανών.
 β) Να βρείτε ποιο ποσοστό των μηνιαίων εσόδων αποταμιεύεται.
 γ) Αν τα μηνιαία έσοδα μειώθηκαν κατά 12% , να βρείτε το νέο ποσό των μηνιαίων εσόδων.

ΛΥΣΗ

α) Έξοδα για φαγητό : $\frac{40}{100} \cdot 2800 = 1120 \text{ €}$

Έξοδα για νοίκι : $\frac{20}{100} \cdot 2800 = 560 \text{ €}$

Έξοδα για ρούχα : $\frac{1}{28} \cdot 2800 = 100 \text{ €}$

β) Σύνολο εξόδων : $1120 + 560 + 100 + 112 = 1892$

Το ποσό που αποταμιεύεται είναι $2800 - 1892 = 908 \text{ €}$

Το ποσό που αποταμιεύεται αποτελεί τα $\frac{908}{2800}$ των μηνιαίων εσόδων.

$$\text{Οπότε } \frac{908}{2800} \approx 0,324 = \frac{32,4}{100} = 32,4\%$$

γ) Το ποσό της μείωσης είναι : $\frac{12}{100} \cdot 2800 = 336 \text{ €}$

Επομένως το ποσό των νέων εσόδων είναι ίσο με $2800 - 336 = 2464 \text{ €}$

6.

αλγεβρική παράσταση

A. Να αναλύσετε τον αριθμό 630 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

B. Να βρείτε το Μ.Κ.Α. και Μ.Κ.Δ. των αριθμών 5, 6 και 12.

Γ. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\Pi = (2^3 + 1) : (5^2 - 11 \cdot 2) + (3^2 - 2^3)^{100}$

ΛΥΣΗ

A.

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Είναι $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

B.

5	6	12	2
5	3	6	2
5	3	3	3
5	1	1	5
1	1	1	

• για το ΕΚΠ έχουμε :

$$\text{ΕΚΠ}(5, 6, 12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

5	6	12
5	1	2
0	1	0

• για το ΜΚΔ έχουμε :

$$\text{ΜΚΔ}(5, 6, 12) = 1$$

Γ. Για την παράσταση έχουμε

$$\Pi = (2^3 + 1) : (5^2 - 11 \cdot 2) + (3^2 - 2^3)^{100}$$

$$\Pi = (8 + 1) : (25 - 22) + (9 - 8)^{100}$$

$$\Pi = 9 : 3 + 1^{100}$$

$$\Pi = 9 : 3 + 1$$

$$\Pi = 3 + 1$$

$$\Pi = 4$$

να θυμόμαστε την προτεραιότητα πράξεων

- προηγούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις
- υπολογίζουμε τις δυνάμεις
- κάνουμε τους πολ/σμούς και τις διαιρέσεις
- κάνουμε τις προσθέσεις-αφαιρέσεις

Έστω ότι $A = \left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} + 4 : \frac{2}{5} + (3^2 + 2^4) \cdot \frac{4}{25}$ και $B = \left(\frac{11}{3} - \frac{5}{2}\right) : \frac{7}{3} + \frac{3}{4} \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\right)$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A και B.

β) Αν $A = 15$ και $B = 4$, να βρείτε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των A και B.

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί οι αριθμοί A και B είναι πρώτοι μεταξύ τους.

δ) Να λύσετε τις εξισώσεις $A - x = B$ και $x : A = B$.

ΛΥΣΗ

α) είναι

$$A = \left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} + 4 : \frac{2}{5} + (3^2 + 2^4) \cdot \frac{4}{25}$$

$$A = \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} + 4 : \frac{2}{5} + (9 + 16) \cdot \frac{4}{25}$$

$$A = \left(\frac{6-1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} + 4 : \frac{2}{5} + (25) \cdot \frac{4}{25} \quad \text{και}$$

$$A = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{1} \cdot \frac{4}{25}$$

$$A = 1 + 10 + 4$$

$$A = 15$$

$$B = \left(\frac{11}{3} - \frac{5}{2}\right) : \frac{7}{3} + \frac{3}{4} \cdot \left(5 - \frac{1}{3}\right)$$

$$B = \left(\frac{22}{6} - \frac{15}{6}\right) : \frac{7}{3} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{15}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$B = \frac{7}{6} : \frac{7}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{3}$$

$$B = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{3}$$

$$B = \frac{3}{6} + \frac{14}{4}$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$$

$$B = \frac{8}{2} = 4$$

β) είναι $\text{ΕΚΠ}(A, B) = \text{ΕΚΠ}(15, 4) = 60$.

γ) Οι αριθμοί 15, 4 είναι πρώτοι μεταξύ τους γιατί $\text{ΜΚΔ}(15, 4) = 1$

δ) Για τις εξισώσεις έχουμε :

$$x : A = B$$

$$A - x = B$$

$$x : 15 = 4$$

$$15 - x = 4$$

και

$$\frac{x}{15} = 4$$

$$15 - 4 = x$$

$$x = 15 \cdot 4$$

$$x = 11$$

$$x = 60$$

Έστω οι αριθμοί $A = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \cdot (2^3 - 2) - 3^2$, $B = 17 - 12 + (6 - 2^2) - 6$ και

$$\Gamma = \frac{4}{3} : \frac{4}{5} - \left(1 - \frac{6}{15}\right).$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A , B και Γ .

β) Αν $A = \frac{2}{3}$ και $B = 1$ και $\Gamma = \frac{16}{15}$, να τους διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

ΛΥΣΗ

α) είναι

$$A = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \cdot (2^3 - 2) - 3^2 = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \cdot (8 - 2) - 9 = \frac{5}{3} + \frac{4}{3} \cdot 6 - 9$$

$$= \frac{5}{3} + 4 \cdot 2 - 9 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = 17 - 12 + (6 - 2^2) - 6 = 17 - 12 + (6 - 4) - 6 = 5 + 2 - 6 = 1 \quad \text{και}$$

$$\Gamma = \frac{4}{3} : \frac{4}{5} - \left(1 - \frac{6}{15}\right) = \frac{4}{3} : \frac{4}{5} - \left(\frac{15}{15} - \frac{6}{15}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{9}{15} = \frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{25 - 9}{15} = \frac{16}{15}$$

β) είναι $\frac{2}{3} < 1$ (αφού $2 < 3$) και $\frac{16}{15} > 1$ (αφού $16 > 15$).

Κατά συνέπεια $\frac{2}{3} < 1 < \frac{16}{15}$

Ένα καινούργιο αυτοκίνητο κοστίζει 20000 €. Το αγόρασε κάποιος και μετά ήθελε να το πουλήσει κατά 30% λιγότερο από όσο το αγόρασε. Ο υποψήφιος αγοραστής έμαθε ότι το ίδιο μοντέλο καινούργιο κόστιζε 25000€

(α) Σε ποια τιμή θα αγόραζε το μεταχειρισμένο μοντέλο;

(β) Τι ποσοστό της τιμής του καινούργιου αυτοκινήτου είναι η τιμή του μεταχειρισμένου ;

(γ) Αν ένα μαγαζί που πουλάει μεταχειρισμένα αυτοκίνητα δίνει το ίδιο μοντέλο 40% φτηνότερα από την τρέχουσα τιμή του καινούργιου, από ποιον συμφέρει να αγοράσει το μεταχειρισμένο μοντέλο ο υποψήφιος αγοραστής ;

ΛΥΣΗ

Κόστος αγοράς : 2000

$$\text{Ποσό έκπτωσης : } \frac{30}{100} \cdot 20000 = \frac{600000}{100} = 6000 \text{ €}$$

$$\text{Τιμή πώλησης : } 20000 - 6000 = 14000 \text{ €}$$

(α) Επομένως το μεταχειρισμένο αυτοκίνητο θα αγοραζόταν 14000 €

$$\text{(β) Τιμή του μεταχειρισμένου ως ποσοστό της τιμής του καινούργιου } \frac{14000}{25000} = 0,56$$

Δηλαδή η τιμή του μεταχειρισμένου είναι το 56% της τιμής του καινούργιου

$$\text{(γ) Έκπτωση καταστήματος : } \frac{40}{100} \cdot 25000 = \frac{1000000}{100} = 10000 \text{ €}$$

$$\text{Τιμή πώλησης από κατάστημα : } 25000 - 10000 = 15000 \text{ €}$$

Επειδή $14000 < 15000$ συμφέρει η αγορά από τον ιδιώτη

10. σύνθετο θέμα με παραστάσεις και πράξεις κλασμάτων

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 5^2 - 4 \cdot 5 + (2^3 : 4 - 1) \cdot 2 - 6 \text{ και}$$

$$B = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - 4 : (-2) - (3 - 4) \cdot (-2) - (-1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $A=1$ και $B=-5$.

β) βρεθεί η τιμή της παράστασης: $\frac{A}{2} + \frac{B}{3} + 1$.

ΛΥΣΗ

α) είναι

$$A = 5^2 - 4 \cdot 5 + (2^3 : 4 - 1) \cdot 2 - 6 = 5^2 - 4 \cdot 5 + (8 : 4 - 1) \cdot 2 - 6$$

$$A = 5^2 - 4 \cdot 5 + (2 - 1) \cdot 2 - 6 = 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 - 6 = 25 - 20 + 2 - 6 \quad \text{και}$$

$$A = 1$$

$$B = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - 4 : (-2) - (3 - 4) \cdot (-2) - (-1)$$

$$B = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) - 4 : (-2) - (-1) \cdot (-2) - (-1)$$

$$B = -6 + 2 - 2 + 1$$

$$B = -5$$

β) η παράσταση γράφεται

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{3} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{-5}{3} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + 1 = \frac{3}{6} - \frac{10}{6} + \frac{6}{6} = \frac{3-10+6}{6} = -\frac{1}{6}$$

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{2}{11} + \frac{5}{11}$, $B = \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right)$, $\Gamma = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{7}{2}}$

B1. Να αποδειχθεί ότι $A = \frac{7}{11}$ και $B = \frac{7}{4}$.

B2. Να αποδειχθεί ότι $\Gamma = \frac{4}{7}$ και να συγκρίνεται τα κλάσματα A και B του ερωτήματος B1.

B3. Να βρεθεί το γινόμενο $B \cdot \Gamma$. Τι συμπέρασμα βγάξετε για τους αριθμούς B και Γ;

ΛΥΣΗ

B₁) είναι

$$A = \frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{2+5}{11} = \frac{7}{11} \quad \text{και}$$

προσοχή !
αντί για πολ/σμό ,για ευκολία
πράξεων ,κάνουμε απλοποίηση

$$B = \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{9}{4} - \frac{6}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{3} + \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{4}$$

B₂) είναι $\Gamma = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{7}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 7} = \frac{4}{7}$ και $\frac{7}{11} < \frac{7}{4}$,γιατί έχουν κοινό αριθμητή και $11 > 4$.

B₃) είναι $B \cdot \Gamma = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} = 1$,δηλαδή οι αριθμοί B, Γ είναι αντίστροφοι.

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = 4^2 - 2^4 \quad B = \frac{19}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad \Gamma = 6 : \frac{3}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{3}$$

i) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραπάνω παραστάσεων.

ii) Αν $\Delta = (B - \Gamma)^2 - (A + 1)^{2004} - (\Gamma - 2)^{2012}$, όπου τα A, B και Γ είναι οι τιμές των προηγούμενων παραστάσεων, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Δ.

iii) Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω αριθμούς A, B, Γ ως ψηφία, μια φορά το καθένα να γράψετε το μεγαλύτερο τριψήφιο φυσικό αριθμό και να τον αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΛΥΣΗ

i) είναι $A = 4^2 - 2^4 = 16 - 16 = 0$.

$$B = \frac{19}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{3} - \frac{1}{3} = \frac{19-1}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ και}$$

$$\Gamma = 6 : \frac{3}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{3} = \frac{6}{1} \cdot \frac{5}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{3} = 2 \cdot 5 - \frac{14}{2} = 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3$$

ii) είναι $\Delta = (B - \Gamma)^2 - (A + 1)^{2004} - (\Gamma - 2)^{2012} = (6 - 3)^2 - (0 + 1)^{2004} - (3 - 2)^{2012}$, δηλαδή

$$\Delta = 3^2 - 1^{2004} - 1^{2012} = 9 - 1 - 1 = 7$$

iii) οι τριψήφιοι αριθμοί που γράφονται με

ψηφία τα $A = 0$, $B = 6$ και $\Gamma = 3$ είναι :

360, 603, 630, 306 και ο μεγαλύτερος

φυσικά είναι ο 630.

Η ανάλυσή του δε σε γινόμενο πρώτων

παραγόντων γίνεται με την γνωστή διάταξη .

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Έτσι έχουμε $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

13. σύνθετο θέμα με παραστάσεις-ανάλυση σε γινόμενο

Δίνονται οι παραστάσεις $\alpha = (3^2 - 4) \cdot 3 - (6^2 : 3) + 2$, $\beta = 3 \cdot (3 \cdot 4 + 2^2) - (5^2 - 7^1) : 1^3$

A1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$, $\beta = 30$.

A2. Να βρείτε τον ΜΚΛ(α, β) και το ΕΚΠ(α, β), όπου α και β τα αποτελέσματα του ερωτήματος A1.

A3. Αν α , β τα αποτελέσματα του ερωτήματος A1, να

δείξετε ότι οι λόγοι $\frac{x}{y}$, στον διπλανό πίνακα, είναι ίσοι

x	2	α	10
y	6	15	β

ΛΥΣΗ

A1. Υπολογίζουμε την τιμή της κάθε μιας παράστασης .

$$\alpha = (3^2 - 4) \cdot 3 - (6^2 : 3) + 2$$

$$\alpha = (9 - 4) \cdot 3 - (36 : 3) + 2$$

$$\alpha = 5 \cdot 3 - 12 + 2$$

$$\alpha = 15 - 12 + 2$$

$$\alpha = 5$$

$$\beta = 3 \cdot (3 \cdot 4 + 2^2) - (5^2 - 7^1) : 1^3$$

$$\beta = 3 \cdot (12 + 4) - (25 - 7) : 1^3$$

$$\beta = 3 \cdot 16 - 18 : 1$$

$$\beta = 48 - 18$$

$$\beta = 30$$

A2. Έχουμε :

- $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = \text{ΜΚΔ}(5, 30) = 5$, αφού ο 5 διαιρεί τον αριθμό 30 .
- $\text{ΕΚΠ}(\alpha, \beta) = \text{ΕΚΠ}(5, 30) = 30$, αφού ο αριθμός 30 είναι πολλαπλάσιο του 5 .

A3. Έχουμε :

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{2:2}{6:2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{15} = \frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3} \text{ και } \frac{x}{y} = \frac{10}{\beta} = \frac{10}{30} = \frac{10:10}{30:10} = \frac{1}{3}.$$

Δηλαδή οι λόγοι είναι ίσοι .

14.

πρόβλημα με ποσά - ποσοστά

Τα $\frac{4}{7}$ των μαθητών μιας τάξης Γυμνασίου παρακολουθεί αγγλικά, το $\frac{1}{4}$ γερμανικά και οι υπόλοιποι γαλλικά.

α. Τι μέρος και τι ποσοστό της τάξης παρακολουθεί γαλλικά;

β. Αν οι μαθητές που παρακολουθούν γαλλικά είναι 10 να βρεθούν οι μαθητές της τάξης.

ΛΥΣΗ

α. Το μέρος της τάξης που παρακολουθεί γαλλικά είναι :

$$1 - \left(\frac{4}{7} + \frac{1}{4} \right) = \frac{28}{28} - \left(\frac{16}{28} + \frac{7}{28} \right) = \frac{28}{28} - \frac{23}{28} = \frac{5}{28}, \text{ το δε ποσοστό είναι } \frac{5}{28} \cdot 100 = \frac{500}{28} = 17,85$$

β. Έστω x το πλήθος των μαθητών της τάξης, οπότε είναι : $\frac{5}{28} \cdot x = 10$

Α τρόπος

$$\frac{5}{28} \cdot x = 10$$

$$x = 10 : \frac{5}{28}$$

$$x = \frac{10}{1} \cdot \frac{28}{5}$$

$$x = 2 \cdot 28 = 56$$

Β τρόπος

$$\frac{5}{28} \cdot x = 10$$

$$\frac{5}{28} \cdot \frac{x}{1} = 10$$

$$\frac{5x}{28} = \frac{10}{1}$$

$$5x = 280$$

$$x = \frac{280}{5} = 56$$

15. συνδιαστικό-αριθμητική παράσταση – απλοποίηση-τροπή κλάσματος σε ποσοστό

- (i) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις : $\alpha = 5^2 - 4^2 + 3$ και $\beta = 4 \cdot (2^3 - 5) + 24 : 3$
- (ii) Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μέχρι να γίνει ανάγωγο
- (iii) Να αναλυθούν οι αριθμοί α και β σε γινόμενα πρώτων παραγόντων
- (iv) Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ να μετατραπεί σε ποσοστό %
(όπου α και β είναι οι αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα (i))

ΛΥΣΗ

- (i) Υπολογίζουμε την τιμή της κάθε μιας παράστασης .

$$\begin{aligned}\alpha &= 5^2 - 4^2 + 3 & \beta &= 4 \cdot (2^3 - 5) + 24 : 3 \\ \alpha &= 25 - 16 + 3 & \beta &= 4 \cdot (8 - 5) + 24 : 3 \\ \alpha &= 12 & \beta &= 4 \cdot 3 + 24 : 3 \\ & & \beta &= 12 + 8 \\ & & \beta &= 20\end{aligned}$$

- (ii) Απλοποιούμε διαδοχικά το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μέχρι να γίνει ανάγωγο. Έτσι έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{12}{20} = \frac{12 : 2}{20 : 2} = \frac{6}{10} = \frac{6 : 2}{10 : 2} = \frac{3}{5}$$

- (iii) $\alpha = 12 = 2^2 \cdot 3$ και $\beta = 20 = 2^2 \cdot 5$

- (iv) είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{5}$, οπότε για να το τρέψουμε σε ποσοστό πολλαπλασιάζουμε με το 100.

$$\text{Έτσι } \frac{\alpha}{\beta} \% = \frac{3}{5} \cdot 100 = 3 \cdot 20 = 60\%$$

16.**θεωρία**

α) Ποιες γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές και ποιες συμπληρωματικές ;

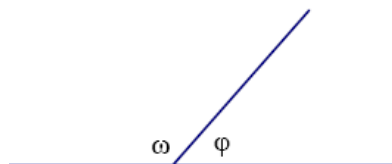
Να σχεδιάσετε δύο εφεξής παραπληρωματικές γωνίες και να τις ονομάσετε.

β) Να βρείτε τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματική μιας αμβλείας γωνίας και η συμπληρωματική μιας οξείας γωνίας.

γ) Ποια σχέση συνδέει τις οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Παραπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° , ενώ Συμπληρωματικές ονομάζονται δύο γωνίες με άθροισμα 90° . Στο διπλανό σχέδιο φαίνονται οι εφεξής παραπληρωματικές γωνίες ω και φ .



β) Η παραπληρωματική αμβλείας είναι οξεία και η συμπληρωματική μιας γωνίας είναι επίσης οξεία.

γ) Το άθροισμά τους είναι 90° , δηλαδή είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους.

17.**θεωρία**

α) Τι ονομάζουμε μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος AB;

β) Τι ονομάζουμε μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος και ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα που έχουν τα σημεία της μεσοκαθέτου ;

γ) Πως μπορούμε να βρούμε το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος χρησιμοποιώντας τον κανόνα και τον διαβήτη ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος ονομάζουμε το σημείο που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

β) Ονομάζουμε μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος την κάθετο στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος.

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος.

γ) Κατασκευάζοντας την μεσοκάθετο με κανόνα και διαβήτη το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα είναι το μέσο του.

- α) Πότε δύο γωνίες λέγονται εφεξής;
- β) Ποιο σχήμα ονομάζουμε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ ;
- γ) Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της πρώτης στήλης με ένα γράμμα της δεύτερης στήλης , ώστε να προκύπτουν αληθινές προτάσεις.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. Η ορθή γωνία έχει μέτρο	α. 360^0
2. Η ευθεία γωνία έχει μέτρο	β. 90^0
3. Η πλήρης γωνία έχει μέτρο	γ. 180^0
4. Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα...	δ. 70^0
5. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα...	

όπως έχουμε τονίσει
ξανά ,κάνουμε σχήμα
μόνο εφόσον ζητείται

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- α) Εφεξής λέγονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή , μια πλευρά τους είναι κοινή και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.
- β) Ονομάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ρ το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν από το O απόσταση ίση με ρ .
- γ) Από τους σχετικούς ορισμούς προκύπτουν οι αντιστοιχίες :
 $1 \rightarrow \beta$, $2 \rightarrow \gamma$, $3 \rightarrow \alpha$, $4 \rightarrow \beta$, $5 \rightarrow \gamma$

- A. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις
- α. **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές
- β. **Ορθογώνιο** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του
- γ. **Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του
- δ. Το τετράπλευρο του οποίου **μόνο** δυο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται
- ε. Το **τετράγωνο** είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και
- B. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις με ένα **Σ** αν είναι σωστές και με ένα **Λ** αν είναι λανθασμένες
- α. **Ορθογώνιο** τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο εκείνο που έχει μια ορθή γωνία
- β. **Οξυγώνιο** τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο εκείνο που έχει μια οξεία γωνία
- γ. Ένα **ισοσκελές** τρίγωνο μπορεί να είναι και ορθογώνιο
- δ. Το **ισόπλευρο** τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο
- ε. Στο **ισόπλευρο** τρίγωνο, κάθε **διάμεσος** είναι ύψος και διχοτόμος

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A . Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παρακάτω

α. **Παραλληλόγραμμα** λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές **παράλληλες**

β. **Ορθογώνιο** λέγεται το παραλληλόγραμμα που έχει όλες τις γωνίες του **ορθές**

γ. **Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμα που έχει όλες τις πλευρές του **ίσες**

δ. Το τετράπλευρο του οποίου **μόνο** δυο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται **τραπέζιο**

ε. Το **τετράγωνο** είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και **ρόμβος**

B .

α. Σωστό

β. Λάθος αφού το σωστό είναι όλες τις γωνίες οξείες

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

20.

θεωρία

α) Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά

i) Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν όταν έχουν κοινή και οι πλευρές τους είναιημιευθείες

ii) Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή , μία πλευρά κοινή και δεν έχουν άλλα κοινά σημεία ονομάζονται

iii) Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν..... 90^0

β) Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της στήλης Α με ένα γράμμα της στήλης Β έτσι ώστε να προκύπτουν αληθινές προτάσεις

Στήλη Α : είδος γωνίας	Στήλη Β : μέτρο γωνίας
1. ορθή γωνία	α. 0^0
2. ευθεία γωνία	β. 360^0
3. πλήρης γωνία	γ. μεταξύ 0^0 και 90^0
4.αμβλεία γωνία	δ. 180^0
5.οξεία γωνία	ε. 90^0
6. μη κυρτή γωνία	στ. μεταξύ 90^0 και 180^0
7. μηδενική γωνία	ζ. μεταξύ 180^0 και 360^0

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παρακάτω

i) Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν όταν έχουν κοινή **κορυφή** και οι πλευρές τους είναι **αντικείμενες** ημιευθείες.

ii) Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή , μία πλευρά κοινή και δεν έχουν άλλα κοινά

σημεία ονομάζονται **εφεξής**

iii) Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν **άθροισμα** 90°

β) Με βάση τους σχετικούς ορισμούς έχουμε τις παρακάτω αντιστοιχίσεις

$1 \rightarrow \epsilon$, $2 \rightarrow \delta$, $3 \rightarrow \beta$, $4 \rightarrow \sigma\tau$, $5 \rightarrow \gamma$, $6 \rightarrow \zeta$, $7 \rightarrow \alpha$

21.

θεωρία

α) Τι ονομάζουμε απόσταση ενός σημείου A από μία ευθεία ϵ ;

β) Ποιες ευθείες λέμε τεμνόμενες και ποιες παράλληλες ; Να γίνουν τα σχετικά σχήματα

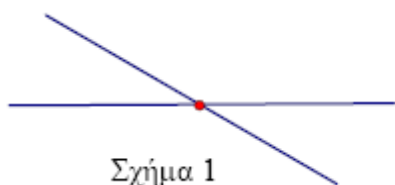
γ) Τι ονομάζουμε απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών ; Να γίνει το σχετικό σχήμα

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Ονομάζουμε απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ το μήκος του καθέτου ευθυγράμμου τμήματος που φέρνουμε από το σημείο A στην ευθεία ϵ .

β) Τεμνόμενες λέμε τις ευθείες που έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και παράλληλες αυτές που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Στο σχήμα 1 βλέπουμε δύο τεμνόμενες ευθείες και στο σχήμα 2 δύο παράλληλες



Σχήμα 1

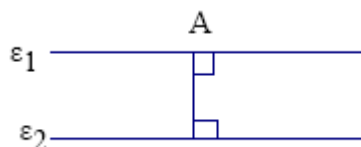


Σχήμα 2

γ) Ονομάζουμε απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών το μήκος οποιουδήποτε

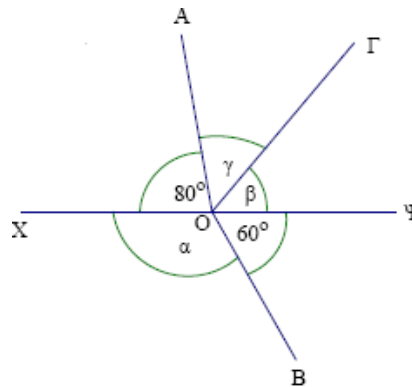
ευθυγράμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες και έχει τα άκρα του πάνω σ' αυτές .

Στο διπλανό σχήμα, η απόσταση των παραλλήλων ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 είναι το μήκος του τμήματος AB



Στο διπλανό σχήμα η γραμμή $\square XO\Psi$ είναι ευθεία και η $ΟΓ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\square AO\Psi$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$



ΛΥΣΗ

Αφού η γραμμή $XO\Psi$ είναι ευθεία, η γωνία των 60° με την $\hat{\alpha}$ θα είναι παραπληρωματικές. Άρα $\hat{\alpha} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Για τον ίδιο λόγο $\square AO\Psi = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

Και επειδή η $ΟΓ$ είναι διχοτόμος της $\square AO\Psi$, θα είναι $\hat{\beta} = \hat{\gamma} = 100 : 2 = 50^\circ$

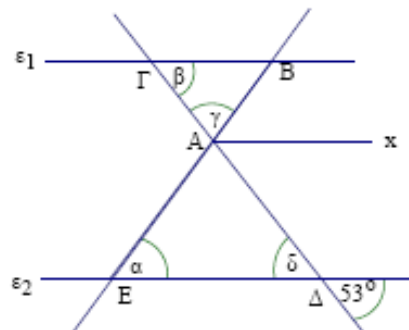
Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες και $AB = AG$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\beta}$

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\alpha}$.

γ) Αν η ημιευθεία Ax είναι παράλληλη στις ϵ_1 και ϵ_2 , να δικαιολογήσετε γιατί

η ημιευθεία Ax είναι διχοτόμος της γωνίας $\square B\hat{A}\Delta$



ΛΥΣΗ

α) $\hat{\delta} = 53^\circ$ ως κατακορυφήν και $\hat{\beta} = \hat{\delta}$ ως εντός εναλλάξ. Άρα $\hat{\beta} = 53^\circ$ (1)

β) Επειδή $AB = AG$, στο ισοσκελές τρίγωνο ABG είναι $\hat{\beta} = \square B\hat{A}G$.

Οπότε, λόγω της (1), $\square B\hat{A}G = 53^\circ$ (2)

Στο τρίγωνο ABG είναι $\hat{\beta} + \square B\hat{A}G + \hat{\gamma} = 180^\circ$, άρα $53^\circ + 53^\circ + \hat{\gamma} = 180^\circ$ οπότε

$\hat{\gamma} = 74^\circ$. Ακόμα $\hat{\alpha} = \square B\hat{A}G$ ως εντός εναλλάξ. Οπότε λόγω της (2) είναι και $\hat{\alpha} = 53^\circ$

γ) $\square A\hat{\Delta} = \hat{\delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Ax και ϵ_2 με τέμνουσα την $A\Delta$.

Και αφού $\hat{\delta} = 53^\circ$ θα είναι και $\square A\hat{\Delta} = 53^\circ$. Αφού $\epsilon_1 // Ax$, είναι $\square A\hat{B} = \square B\hat{A}G = 53^\circ$, λόγω της (2)

Αφού λοιπόν είναι $\angle A\hat{B} = 53^\circ = \angle A\hat{A}\Delta$, η Αx είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle B\hat{A}\Delta$

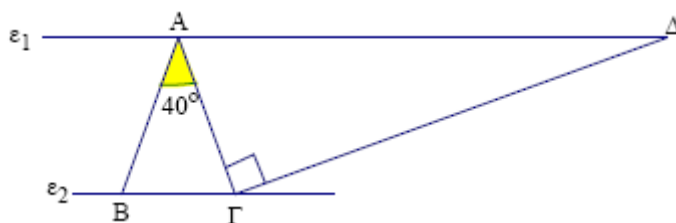
24.

συνδιαστικό παραλληλία – γωνίες τριγώνου

Να σχεδιάσετε δύο παράλληλες ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) και πάνω στην (ϵ_1) να πάρετε ένα τυχαίο σημείο Α. Επίσης πάνω στην (ϵ_2) να πάρετε τα σημεία Β και Γ έτσι ώστε να είναι $AB = AG$. Από το σημείο Γ να φέρετε μία ημιευθεία κάθετη στην ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία (ϵ_1) στο σημείο Δ. Αν υποθέσουμε ότι $\angle B\hat{A}\Gamma = 40^\circ$, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\angle A\hat{B}\Gamma$ και $\angle A\hat{\Delta}\Gamma$

ΛΥΣΗ

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει το παρακάτω σχήμα



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, οι γωνίες $\angle A\hat{B}\Gamma$ και $\angle A\hat{\Gamma}B$ είναι ίσες, έστω ότι $\angle A\hat{B}\Gamma = \angle A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $40^\circ + \hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 180^\circ$, άρα $2\hat{\varphi} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
 $\hat{\varphi} = 140^\circ : 2 = 70^\circ$

Δηλαδή $\angle A\hat{B}\Gamma = 70^\circ = \angle A\hat{\Gamma}B$ (1)

Επίσης $\angle A\hat{\Gamma}B = \angle A\hat{\Gamma}\Delta$, ως εντός εναλλάξ και λόγω της (1) $\angle A\hat{\Gamma}\Delta = 70^\circ$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $\angle A\hat{\Gamma}\Delta + \angle A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ άρα

$$70^\circ + \angle A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ, \text{οπότε } \angle A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

25.

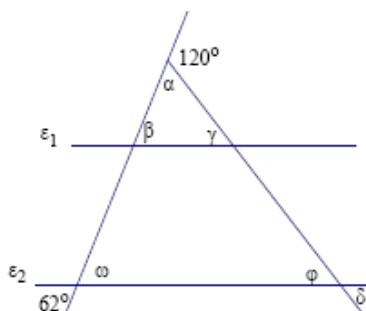
συνδιαστικό παραλληλία – γωνίες τριγώνου

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2

είναι παράλληλες.

Να υπολογίσετε τις γωνίες

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$



ΛΥΣΗ

• Η γωνία $\hat{\alpha}$, ως παραπληρωματική της γωνίας των 120° , είναι 60°

• Η γωνία $\hat{\omega} = 62^\circ$ ως κατακορυφήν.

• Από το σχηματιζόμενο τρίγωνο με γωνίες τις $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$ και $\hat{\phi}$ έχουμε ότι

$$\hat{\omega} + \hat{\alpha} + \hat{\phi} = 180^\circ \text{ άρα } 62^\circ + 60^\circ + \hat{\phi} = 180^\circ \text{ οπότε}$$

$$\hat{\phi} = 180^\circ - 62^\circ - 60^\circ = 58^\circ.$$

Τότε και $\hat{\delta} = 58^\circ$ ως κατακορυφήν της $\hat{\phi}$

$\hat{\beta} = \hat{\omega} = 62^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά

και $\hat{\gamma} = \hat{\phi} = 58^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

26. συνδιαστικό παραλληλία – είδος τριγώνου τριγώνου

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\delta \perp \varepsilon_2$

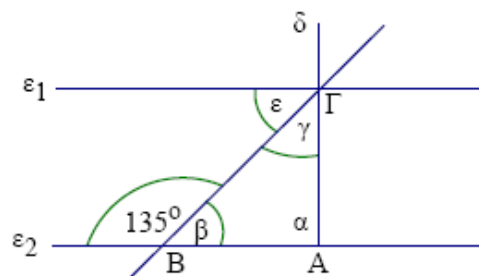
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\varepsilon}$ δικαιολογώντας την

απάντησή σας

β) Να καθορίσετε το είδος του τριγώνου

ABΓ από την άποψη των γωνιών του και από την άποψη των πλευρών του.



ΛΥΣΗ

α) Αφού $\delta \perp \varepsilon_2$, είναι $\hat{\alpha} = 90^\circ$.

Η $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας των 135° , άρα $\hat{\beta} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

Είναι $\hat{\beta} + \hat{\gamma} = 90^\circ$, ως οξείες γωνίες ορθογώνιου τριγώνου. Άρα

$$\hat{\gamma} = 90^\circ - \hat{\beta} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

β) Το τρίγωνο από την άποψη των γωνιών είναι ορθογώνιο και από την άποψη των πλευρών ισοσκελές.

27. συνδιαστικό άλγεβρα-γεωμετρία

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ σε μοίρες είναι ίση με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών 60 και 80, και η γωνία $\hat{B}$ είναι τετραπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

α) Να βρείτε τον ΜΚΔ των αριθμών 60 και 80.

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου με κριτήριο τις γωνίες του.

ΛΥΣΗ

α) Αναλύοντας τους αριθμούς 60 και 80 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων βρίσκουμε ότι $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2^2$ και $80 = 5 \cdot 2^4$

Οπότε $\text{ΜΚΔ}(60, 80) = 5 \cdot 2^2 = 20$

β) Από το (α) είναι $A = 20^\circ$

Αν $\Gamma = x^\circ$ τότε $B = 4x^\circ$. Αλλά

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \text{ άρα}$$

$$20^\circ + x^\circ + 4x^\circ = 180^\circ$$

$$20^\circ + 5x^\circ = 180^\circ$$

$$5x^\circ = 180^\circ - 20^\circ$$

$$5x^\circ = 160^\circ$$

$$x^\circ = 160^\circ : 5 = 32^\circ$$

Συνεπώς

$$\hat{\Gamma} = 32^\circ \text{ και}$$

$$\hat{B} = 4 \cdot 32^\circ = 128^\circ. \text{ Επειδή η B είναι αμβλεία το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο}$$

28.

συνδιαστικό άλγεβρα-γεωμετρία

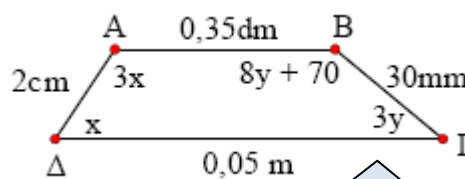
Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο. Οι γωνίες του σε μοίρες είναι

$$\hat{A} = 3x, \hat{B} = 8y + 70^\circ, \hat{\Gamma} = 3y \text{ και } \hat{\Delta} = x.$$

Να υπολογίσετε

α) Τις γωνίες του τραpezίου.

β) Την περίμετρο του τραpezίου



Οι μετατροπές μονάδων δεν είναι στην ύλη. Μπορεί όμως να δοθεί με τις πλευρές να δίνονται με ίδιες μονάδες μέτρησης !

ΛΥΣΗ

α) Οι γωνίες Α και Δ ως εντός και επί τα αυτά είναι παραπληρωματικές,

$$\text{οπότε } \hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$$

$$\text{άρα } 3x + x = 180^\circ$$

$$4x = 180^\circ \text{ οπότε, } x = 180^\circ : 4 = 45^\circ$$

$$\text{Επομένως } \hat{A} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ \text{ και } \hat{\Delta} = 45^\circ$$

Ομοίως για τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{G}$ έχουμε $8y + 70 + 3y = 180^0$
 $11y + 70 = 180^0$
 $11y = 180^0 - 70^0 = 110^0$
 $y = 10$

Επομένως $\hat{B} = 8 \cdot 10 + 70^0 = 150^0$ και $\hat{G} = 3 \cdot 10 = 30^0$

β) $0,35\text{dm} = 0,35 \cdot 10 \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}$

$30\text{mm} = 30 : 10 \text{ cm} = 3\text{cm}$

$0,05\text{m} = 0,05 \cdot 100\text{cm} = 5 \text{ cm}$

Οπότε η περίμετρος Π είναι $\Pi = AB + BG + ΓΔ + ΔΑ = 3,5 + 3$

29.

παραλληλία – τραπέζιο-υπολογισμοί

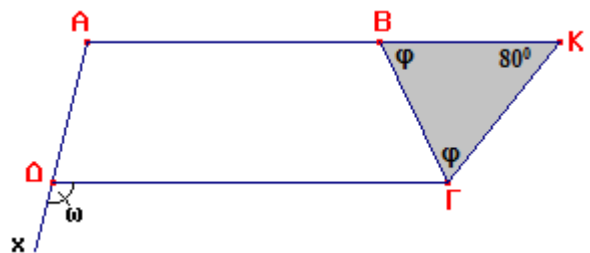
Στο διπλανό σχήμα $AK \parallel \Delta Γ$. Αν το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές ($BK = K\Gamma$) και η γωνία $\hat{K} = 80^0$ να υπολογίσετε:

A. τις γωνίες $\hat{KBG}$ και $\hat{KGB}$

B. Αν η γωνία ω είναι τα $\frac{5}{2}$ της γωνίας $\hat{KBG}$

να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}\Delta\Gamma$ και $\hat{AAB}$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η $B\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}\Gamma\Delta$.



ΛΥΣΗ

A. Αφού το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές, οι παρά τη βάση γωνίες του είναι ίσες, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{G}_1 = \phi$. Έτσι παίρνοντας άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο $KB\Gamma$ έχουμε :

$$\hat{\phi} + \hat{\phi} + \hat{K} = 180^0$$

$$\hat{\phi} + \hat{\phi} + 80^0 = 180^0$$

$$2\hat{\phi} = 180^0 - 80^0$$

$$2\hat{\phi} = 100^0$$

$$\hat{\phi} = 100^0 : 2$$

$$\hat{\phi} = 50^0$$

Έτσι έχουμε
 $\hat{KBG} = \hat{KGB} = 50^0$

B. Είναι $\omega = \frac{5}{2} \hat{KBG} = \omega = \frac{5}{2} \cdot 50^0 = 125^0$.

• Όμως η γωνία $\hat{A}\Delta\Gamma$ είναι παραπληρωματική της ω , οπότε : $\omega + \hat{A}\Delta\Gamma = 180^0$, δηλαδή

$$125^\circ + \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ$$

$$\angle A\Delta\Gamma = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\angle A\Delta\Gamma = 55^\circ$$

- Η γωνία $\angle A\Delta\Gamma$ είναι παραπληρωματική της $\angle A\Delta B$, ως εντός και επί τα αυτά ,

$$\angle A\Delta B + \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ$$

$$\text{οπότε : } \angle A\Delta B + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\angle A\Delta B = 180^\circ - 55^\circ$$

$$\angle A\Delta B = 125^\circ$$

σχόλιο

αλλιώς μπορούμε να γράψουμε

$\angle A\Delta B = \omega = 125^\circ$, ως εντός-εκτός και επί τα αυτά (αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$)

Β. Λόγω της παραλληλίας $AB \parallel \Gamma\Delta$ προκύπτει $\angle K\Gamma\Delta + \angle K = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά),οπότε

$$\angle K\Gamma\Delta + \angle K = 180^\circ$$

$$\angle K\Gamma\Delta + 80^\circ = 180^\circ$$

$$\angle K\Gamma\Delta = 180^\circ - 80^\circ$$

$$\angle K\Gamma\Delta = 100^\circ$$

Έτσι έχουμε

$$\angle A\Gamma B = 100^\circ - \omega = 100^\circ - 50^\circ = 50^\circ$$

Δηλαδή

$\angle A\Gamma B = \omega = 50^\circ$, οπότε η $B\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle K\Gamma\Delta$.

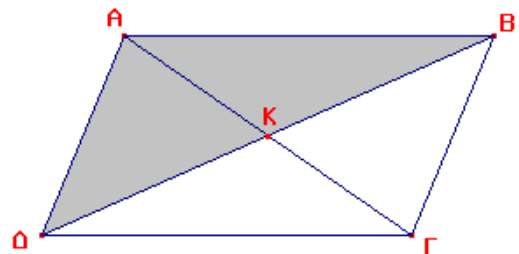
30.

θεωρία

Στο διπλανό παραλληλόγραμμο έστω ότι $A\Delta = 3 \text{ cm}$

και $\Gamma\Delta = 5 \text{ cm}$ και $KB = 3,5 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε σε

cm την περίμετρο του τριγώνου $AB\Delta$.



ΛΥΣΗ

- Επειδή οι απέναντι πλευρές του παρ/μμου είναι ίσες ,θα έχουμε $AB = \Gamma\Delta = 5 \text{ cm}$.

- Επίσης γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιες του παρ/μμου διχοτομούνται. Δηλαδή $KA = K\Gamma$ και $KB = K\Delta$ και έτσι έχουμε $B\Delta = 2KB = 2 \cdot 3,5 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$.

Η ζητούμενη περίμετρος του $\Pi = AB + A\Delta + B\Delta = 5 + 3 + 7 = 15 \text{ cm}$.



ΘΕΜΑΤΑ για αυτάντηση

Αφου μελετήσουμε πολύ προσεκτικά τις ερωτήσεις θεωρίας (ενότητα 1) και τις SOS ασκήσεις (ενότητα 2), θα πρέπει να εξασκηθούμε σε προτεινόμενα θέματα !

Τα θέματα προς απάντηση είναι τα ποιο δημοφιλή σε εξετάσεις Γυμνασίων από πολλές περιοχές και φυσικά είναι **SOS** να μούν και στο σχολείο σου !

Θα τα απαντήσεις αφού έχεις ολοκληρώσει την επανάληψη σου ,με την αντίστοιχη βοήθεια του καθηγητή σου στο **On Line** μάθημα.

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

1.

θέμα άλγεβρας – ορισμός –συμπλήρωση

A. Να γράψετε πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 3 και πότε με το 5.

B. Να μεταφέρετε στη κόλλα σας τις ισότητες συμπληρωμένες:

$$\text{i)} \alpha \cdot \dots = \alpha \quad \text{ii)} \alpha + \dots = \alpha \quad \text{iii)} \alpha(\beta - \gamma) = \dots - \dots \quad \text{iv)} \frac{0}{\alpha} = \dots$$

$$\text{v)} \frac{\alpha}{\alpha} = \dots \quad \text{vi)} \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\dots}{\dots} \quad \text{vii)} \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\dots}{\dots} \quad \text{viii)} \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{\text{n παράγοντες}} = \dots$$

2.

θέμα άλγεβρας – ορισμός –ΣΛ

A. Πότε ένας φυσικός αριθμός λέγεται πρώτος και πότε σύνθετος; Να γράψετε τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 20.

B. Πότε ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2 και πότε με το 3;

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (**Σ**) ή λανθασμένες (**Λ**):

i) Ο αριθμός 2 διαιρεί όλους τους περιττούς αριθμούς.

ii) Ο αριθμός 51042 διαιρείται με το 5.

iii) Ο αριθμός 5490 διαιρείται και με το 2 και με το 9.

Αν δυο φυσικοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους τότε οι αριθμοί είναι πρώτοι.

iv) Ένας φυσικός αριθμός αναλύεται με πολλούς τρόπους σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

3.**θέμα άλγεβρας – ορισμός –συμπλήρωση**

- A1.** Ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι; Να δώσετε ένα παράδειγμα από κάθε περίπτωση.
- A2.** Να δείξετε ότι η ισότητα $125 = 35 \cdot 3 + 20$ παριστάνει Ευκλείδεια διαίρεση, και να συμπληρώσετε τα ακόλουθα κενά : $\delta = \dots\dots\dots$ $\pi = \dots\dots\dots$ $\nu = \dots\dots\dots$
- A3.** Πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 3 και πότε διαιρείται με το 5; Να συμπληρώσετε το ψηφίο στον παρακάτω αριθμό ώστε να διαιρείται ταυτόχρονα με το 3 και το 5 : 232

4.**θέμα άλγεβρας – πολλαπλής επιλογής-ΣΛ**

(α) Να επιλεγεί η σωστή απάντηση σε καθένα από τα παρακάτω ερωτήματα :

- Ο **κύβος** του αριθμού 2 είναι
(i) 2^3 (ii) 3^2 (iii) 2^2
- Στην ισότητα $42 \cdot \square = 42000$, ο αριθμός στο κουτάκι είναι
(i) 10^2 (ii) 10^3 (iii) 10^5
- Η παράσταση $\alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \beta$ είναι ίση με
(i) $3 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta$ (ii) $\alpha^3 + \beta^2$ (iii) $\alpha^3 \cdot \beta^2$
- Ο αριθμός $3 \cdot 5^2$ **διαιρείται**
(i) με το 2 (ii) με το 3 (iii) με το 9
- Ο αριθμός $(2^2 + 3)^2$ ισούται με
(i) 36 (ii) 49 (iii) 72

(β) Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστή» ή «Λάθος» :

- Η ισότητα $60 = 6 \cdot 8 + 12$ παριστάνει **Ευκλείδεια διαίρεση**
- Ο αριθμός 19 είναι **πρώτος**
- Ο αριθμός $(2 \cdot 3)^2$ είναι **πολλαπλάσιο** του 9
- Το 8 είναι **διαιρέτης** του 4
- Ο αριθμός $2^2 + 3^2$ είναι **σύνθετος**

Να συμπληρωθούν τα παρακάτω κενά:

- A) Ένα κλάσμα που δεν απλοποιείται άλλο λέγεται.....
- B) Δύο κλάσματα που έχουν ίδιο παρανομαστή λέγονται.....
- Γ) Δύο κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρανομαστή λέγονται.....
- Δ) Για να συγκρίνουμε δύο κλάσματα αυτά πρέπει να είναι
- E) Ένα κλάσμα είναι ίσο με 1 αν ο αριθμητής του είναιμε τον παρανομαστή.
- Στ) Ένα κλάσμα είναι μικρότερο του 1 αν ο αριθμητής του είναι..... από τον παρανομαστή.
- Ζ) Ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1 αν ο αριθμητής του είναιαπο το παρανομαστή.

A) Η ισότητα $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ με $\upsilon < \delta$ εκφράζει την Ευκλείδια διαίρεση του Δ δια του δ .

i) Να ονομάσετε τα γράμματα Δ , δ , π , υ .

ii) Αν $\upsilon = 0$, πως γράφεται η παραπάνω ισότητα; Πως λέγεται τότε η διαίρεση;

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

i) Αν Δ είναι ένας φυσικός αριθμός τότε το υπόλοιπο της Ευκλείδιας διαίρεσης $\Delta : 4$ μπορεί να είναι 4.

ii) Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης δεν μπορεί να είναι μηδέν.

iii) Η ισότητα $13 = 2 \cdot 5 + 3$ εκφράζει πάντα Ευκλείδια διαίρεση.

iv) Αν $\Delta = \delta \cdot \pi$ τότε $\Delta : \delta = \pi$ ή $\Delta : \pi = \delta$

B1. Πότε δύο γωνίες ονομάζονται συμπληρωματικές;

B2. Να βρείτε την παραπληρωματική της γωνίας 72° .

B3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) _____ γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

β) Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν κοινή _____ και τις πλευρές τους _____ ημιευθείες.

A1. Ποιά είναι τα κύρια και ποια τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου; Τι ονομάζεται διάμεσος ενός τριγώνου;

A2. Να υπολογίσεις τη παραπληρωματική γωνία της x° $y = 125^{\circ}$. Να κάνεις κατάλληλο σχήμα.

A3. Να σχεδιάσεις έναν κύκλο (Κ, 2 cm). Στη συνέχεια να φέρεις μία εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο. Πόσα κοινά σημεία έχει με αυτόν;

B. Να χαρακτηρίσεις τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεων σου την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Εφεξής γωνίες, λέγονται δύο ή περισσότερες γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και κανένα άλλο κοινό σημείο.

β. Η μη κυρτή γωνία έχει μέτρο μεγαλύτερο από 180° και μικρότερο από 360° .

γ. Η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου και είναι τέσσερις φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου.

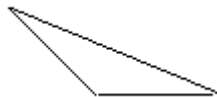
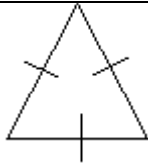
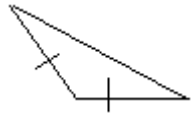
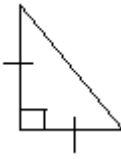
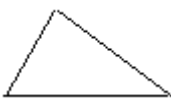
δ. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος, βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό του.

ε. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο, κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.

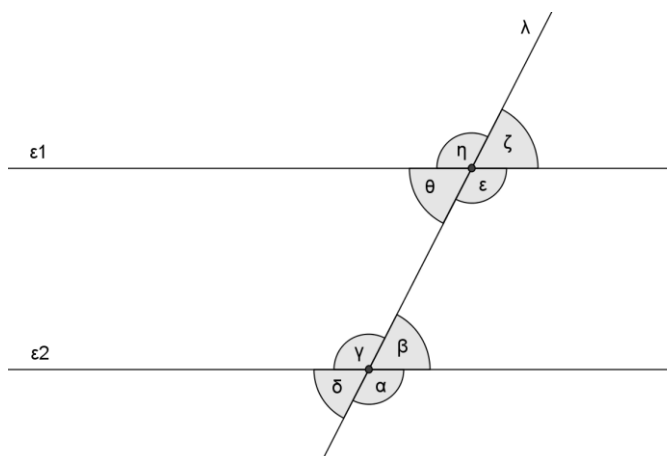
Γ. Να **αντιστοιχίσεις** στην κόλλα σου, κάθε αριθμό της στήλης Α, με το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό σχήμα από τη στήλη Β.

Στήλη Α

Στήλη Β

1. Ισοσκελές και ορθογώνιο.	 A.
2. Σκαληνό και οξυγώνιο.	 B.
3. Ισόπλευρο και οξυγώνιο.	 Γ.
4. Ισοσκελές και αμβλυγώνιο.	 Δ.
5. Σκαληνό και αμβλυγώνιο.	 Ε.

- A.** Να γράψετε τι ονομάζεται μεσοκάθετος τμήματος και ποια είναι η βασική ιδιότητά της.
- B.** Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$) και τέμνονται από την ευθεία λ .



Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με αυτά της στήλης Β και Γ:

ΣΤΗΛΗ Α (ΖΕΥΓΗ ΓΩΝΙΩΝ)	ΣΤΗΛΗ Β (ΟΝΟΜΑΣΙΑ)	ΣΤΗΛΗ Γ (ΣΧΕΣΗ ΓΩΝΙΩΝ)
1. α, γ	α. Εντός εκτός κι επί τ' αυτά	i) Ίσες
2. α, ε	β. Εντός εναλλάξ	ii) Παραπληρωματικές
3. β, θ	γ. Κατακορυφήν	
4. γ, ζ	δ. Εντός κι επί τ' αυτά	
5. β, ε	ε. Εντός εκτός εναλλάξ	

ΣΤΗΛΗ Α	1	2	3	4	5
ΣΤΗΛΗ Β					
ΣΤΗΛΗ Γ					

B1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και μετά να τον μεταφέρετε στην κόλλα σας, αντιστοιχίζοντας κάθε γωνία της στήλης Α, με το χαρακτηριστικό της που υπάρχει στην στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. Ορθή γωνία	1. Το μέτρο της είναι 360°
Β. Ευθεία γωνία	2. Το μέτρο της είναι 180°
Γ. Πλήρης γωνία	3. Το μέτρο της είναι 90°
Δ. Αμβλεία γωνία	4. Γωνία με μέτρο μικρότερο των 90°
Ε. Οξεία γωνία	5. Γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° και μικρότερο των 180°

Α	
Β	
Γ	
Δ	
Ε	

B2. Πότε δύο γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές;

B3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

Εφεξής λέγονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια _____, μία _____ πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.

A) Να χαρακτηρίσεις τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σου, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Οξεία γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μικρότερο των 90°
- Πλήρης λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι 180° .
- Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες
- Μια γωνία λέγεται αμβλεία όταν είναι μικρότερη από 90° .

B) Να γράψεις στην κόλλα σου ολοκληρωμένες τις παρακάτω προτάσεις:

- Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° ονομάζονται
- Δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° ονομάζονται

(Α) Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις με την κατάλληλη σε κάθε περίπτωση λέξη :

1. **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές
2. **Ορθογώνιο** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του
3. **Ρόμβος** λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του
4. Το τετράπλευρο του οποίου **μόνο** δυο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται
5. Το **τετράγωνο** είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και

(Β) Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστή» ή «Λάθος» :

1. **Ορθογώνιο** τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο εκείνο που έχει μια ορθή γωνία
2. **Οξυγώνιο** τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο εκείνο που έχει μια οξεία γωνία
3. Ένα **ισοσκελές** τρίγωνο μπορεί να είναι και ορθογώνιο
4. Το **ισόπλευρο** τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο
5. Στο ισόπλευρο τρίγωνο, κάθε **διάμεσος** είναι ύψος και διχοτόμος

1. Ποιες γωνίες ονομάζουμε εφεξής;
2. Ποιες γωνίες ονομάζουμε κατακορυφήν;
3. Ποιες γωνίες ονομάζουμε παραπληρωματικές;

Να κάνετε ένα σχήμα για κάθε περίπτωση.

14. παράσταση- εκπ – μκδ - εξίσωση

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 3^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 5 - 10^2 : 5 \text{ και } B = \frac{5}{6} + \frac{1}{4} : \frac{1}{2} + 10 \frac{2}{3}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 18$ και $B = 12$

β) Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των A και B

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A \cdot x = B$

15. παράσταση - εξίσωση

$$\text{Δίνονται οι παραστάσεις: } A = \frac{17}{4} - \frac{25}{20} + (3^2 - 2^3)^{2012} \text{ και } B = \frac{6}{5} : \frac{3}{25} - 4 : \frac{1}{2}.$$

A. Να εκτελέσετε τις πράξεις και να δείξετε ότι $A=4$ και $B=2$.

B. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{B} = A$.

16. παράσταση - διαιρετότητα

$$\text{Δίνονται οι παραστάσεις } \alpha = (25-3) \cdot 2 + (2^3 : 4) + 2^2, \beta = 2 \cdot (4 \cdot 5 - 10) + 12 : 3 + 1^{2012}$$

A1. Να αποδειχθεί ότι $\alpha = 50$ και $\beta = 25$.

A2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\Gamma = \alpha + \beta$, όπου α και β τα αποτελέσματα του A1 ερωτήματος, διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 5.

17. παράσταση- σύγκριση κλασμάτων

$$\text{Δίνονται οι παραστάσεις } A = \frac{2}{11} + \frac{5}{11}, B = \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{4}{3} \right), \Gamma = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}}$$

B1. Να αποδειχθεί ότι $A = \frac{7}{11}$ και $B = \frac{7}{4}$.

B2. Να αποδειχθεί ότι $\Gamma = \frac{4}{7}$ και να συγκρίνεται τα κλάσματα A και B του ερωτήματος B1.

B3. Να βρεθεί το γινόμενο $B \cdot \Gamma$. Τι συμπέρασμα βγάξετε για τους αριθμούς B και Γ ;

18. πρόβλημα

Ένας υαλοπώλης αγόρασε 25 δωδεκάδες ποτήρια με 1,80 € το ποτήρι. Στη μεταφορά μερικά ποτήρια έσπασαν. Τα υπόλοιπα τα πούλησε με 2,60 € το ένα και κέρδισε 30% στην τιμή που τα αγόρασε.

A. Πόσα χρήματα έδωσε για να αγοράσει τα ποτήρια και πόσα χρήματα κέρδισε ;

B. Πόσα ποτήρια πούλησε τελικά ;

Γ. Ποιο είναι το ποσοστό των σπασμένων ποτηριών ;

19.

παράσταση- σύγκριση κλασμάτων-ποσοστό

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot 4$, $B = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right)$, $\Gamma = \frac{\frac{3}{4} : \frac{5}{4}}{2 : \frac{1}{2}}$

B1. Να αποδείξετε ότι $A = \frac{6}{5}$..

B2. Να αποδείξετε ότι $B = \frac{11}{60}$ και μετά να συγκρίνετε τα κλάσματα A και B.

B3. Να αποδείξετε ότι $\Gamma = \frac{3}{20}$ και έπειτα να το μετατρέψετε σε ποσοστό.

20.

παράσταση-ανάλυση σε γινόμενο - ποσοστό

(i) Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

$$\alpha = 5^2 - 4^2 + 3 \quad \text{και} \quad \beta = 4 \cdot (2^3 - 5) + 24 : 3$$

(ii) Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μέχρι να γίνει ανάγωγο

(iii) Να αναλυθούν οι αριθμοί α και β σε γινόμενα πρώτων παραγόντων

(iv) Το κλάσμα να μετατραπεί σε ποσοστό %.

(όπου α και β είναι οι αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα (i))

21.

παραστάσεις σε κλάσματα-απλοποιήσεις

Δίνονται τα κλάσματα

$$A = \frac{2^3 + 2^2}{2(2^2 + 1)}, B = \frac{5^2 \cdot 4 + 6 \cdot 4 - 1}{(4^2 + 3^2) \cdot (2^3 - 2^2)}$$

α) Να απλοποιήσετε το κλάσμα A και να το συγκρίνετε με τη μονάδα

β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα B και να το συγκρίνετε με το A

22.

πρόβλημα

Στις εξετάσεις του Ιουνίου σε μια τάξη 40 μαθητών από ένα σχολείο μιας μικρής επαρχιακής πόλης ,προβιβάστηκαν τα $\frac{5}{8}$ των μαθητών , έμεινε για επανεξέταση τον Σεπτέμβριο το $\frac{1}{4}$ των μαθητών

και οι υπόλοιποι έμειναν στην ίδια τάξη.

α) Να βρείτε ποιο μέρος των μαθητών έμεινε στην ίδια τάξη

β) Να βρείτε πόσοι μαθητές προβιβάστηκαν στην επόμενη τάξη

γ) Αν από τους μαθητές που προβιβάστηκαν, το 4% έγραψε βαθμό ακριβώς 20 , να βρείτε πόσοι είναι αυτοί οι μαθητές.

23. παραστάσεις- σύγκριση κλασμάτων-διάταξη κλασμάτων

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{8}{9} : \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{3}{5} \cdot \left(3 - 1\frac{1}{4} \right) - \left(\frac{7}{2} - 2\frac{3}{4} \right)$$

$$\Gamma = 6 \cdot 3^2 - 7^2 \cdot (3^2 - 2^3)^{2012}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \frac{5}{2}$, $B = \frac{3}{10}$, $\Gamma = 5$

Β) Να συγκρίνετε τα κλάσματα $\frac{1}{\Gamma}$, B και να βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ των κλασμάτων αυτών.

24. πρόβλημα

Τρία αδέρφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο Κώστας πήρε 1.200 €, ο Γιάννης πήρε 1.600 € και η Μαίρη πήρε τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων του Κώστα.

α) Πόσα χρήματα πήρε η Μαίρη;

β) Αν τα χρήματα του Γιάννη μειωθούν κατά 25%, πόσα χρήματα θα έχει τώρα ο Γιάννης;

Γ) Να βρεθεί το ποσοστό των χρημάτων της Μαίρης σε σχέση με το συνολικό ποσό που έχουν τώρα τα αδέρφια.

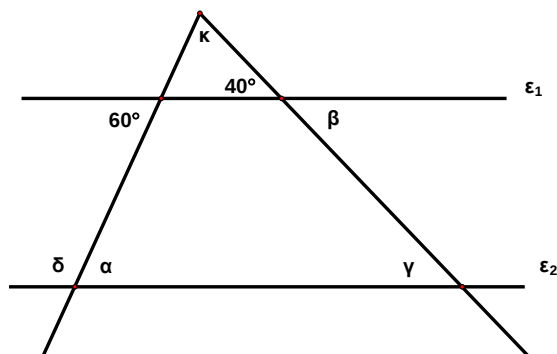
25. γεωμετρία-υπολογισμοί

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Γ1. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$.

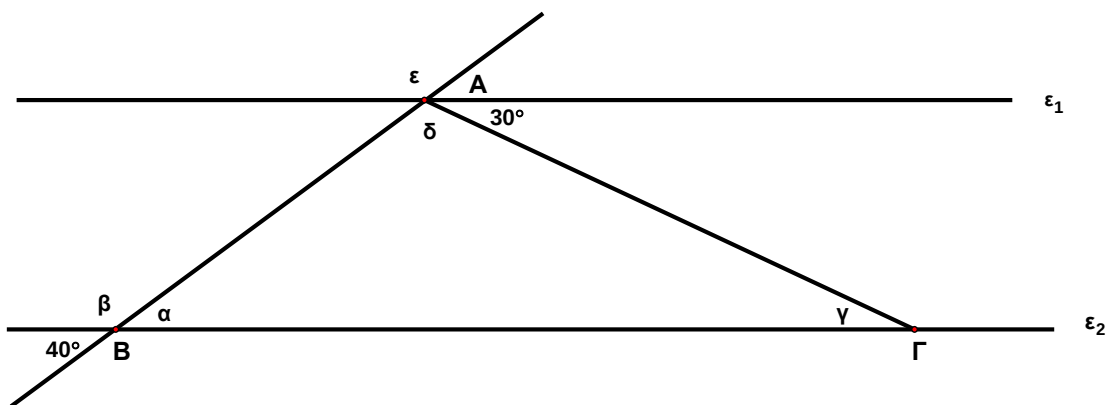
Γ2. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.

Γ3. Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\kappa}$.



26. γεωμετρία-υπολογισμοί

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

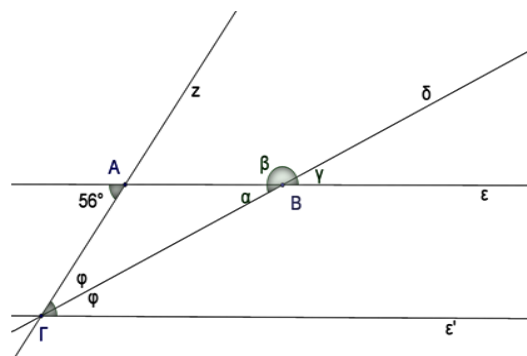


Γ1. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$.

Γ2. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$ και να βρείτε το είδος του τριγώνου ABΓ ως προς τις γωνίες του.

27. γεωμετρία-υπολογισμοί

Στο διπλανό σχήμα είναι ε/ε' και Γδ διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$. Να βρεθούν οι γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$.



28.

γεωμετρία-υπολογισμοί

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Οι ευθείες ε_3 και ε_4 είναι κάθετες στο A , ενώ η γωνία $\omega = 58^\circ$.

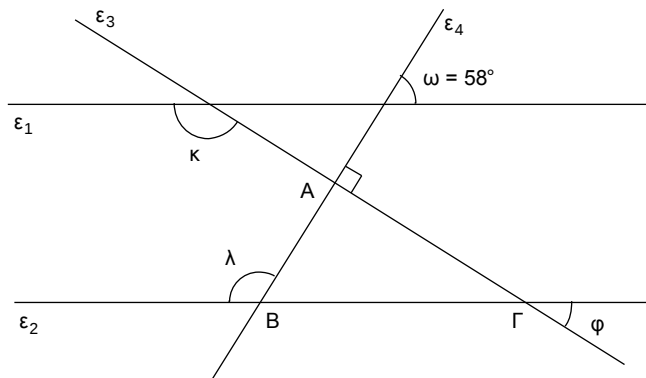
Να υπολογιστούν :

(i) Οι γωνίες $AB\Gamma$ και $A\Gamma B$ στο τρίγωνο $AB\Gamma$ που σχηματίζεται

(ii) Η γωνία κ

(iii) Η γωνία φ

(iv) Η γωνία λ



29.

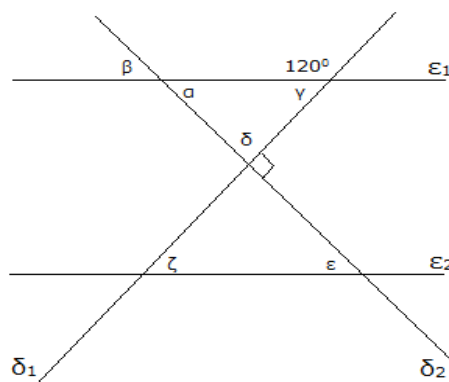
γεωμετρία-υπολογισμοί

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη με την ευθεία ε_2 και τέμνονται από τις ευθείες δ_1 και δ_2 . Οι ευθείες δ_1 και δ_2 τέμνονται κάθετα.

Χωρίς να χρησιμοποιήσεις μοιρογνώμονιο,

να υπολογίσεις τις γωνίες: α , β , γ , δ , ε και ζ .

Να αιτιολογήσεις τις απαντήσεις σου σε κάθε περίπτωση.



30.

γεωμετρία-υπολογισμοί

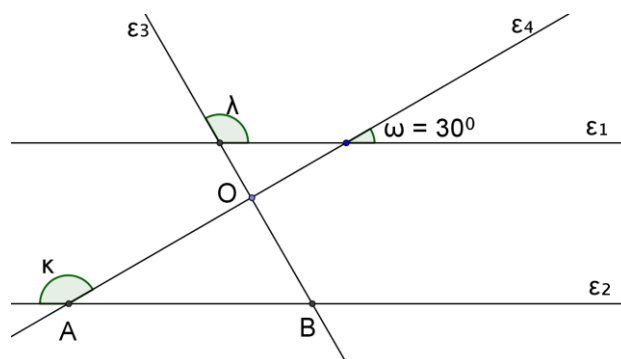
Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 \perp \varepsilon_4$.

Αν $\hat{\omega} = 30^\circ$, να υπολογίσετε:

i) Τις γωνίες του τριγώνου OAB .

ii) Τις γωνίες $\hat{\kappa}$ και $\hat{\lambda}$.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



A1. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, η μία γωνία που αντιστοιχεί στη βάση του είναι $\hat{B} = 75^\circ$. Να βρεις τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου και να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.

A2. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι ευθείες

$x'x$, $y'y$ και $\delta'\delta$ που τέμνονται στο σημείο O.

Η ημιευθεία Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας

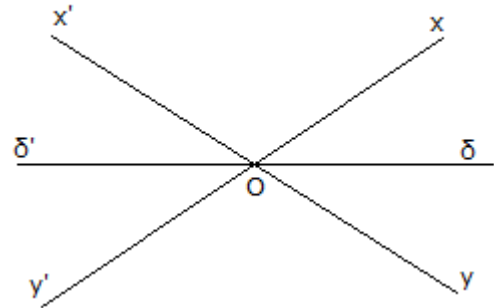
$\angle x'Oy$. Αν η γωνία $\angle x'Oy$ είναι 50° , να

υπολογίσεις χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου

τις γωνίες: $\angle x'O\delta$, $\angle \delta'Oy$, $\angle x'Oy'$, $\angle x'O\delta'$, και $\angle \delta'Oy'$.

Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου σε

κάθε περίπτωση.



Στο παρακάτω σχήμα :

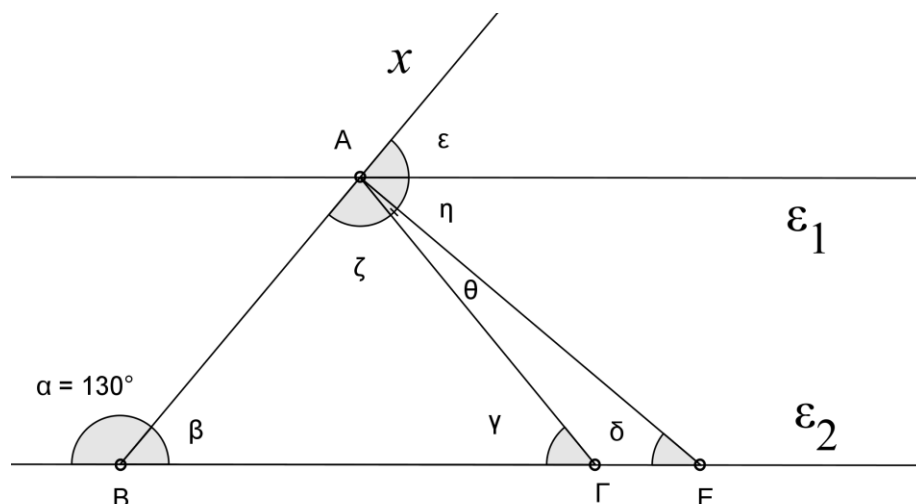
- Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι παράλληλες $(\varepsilon_1 // \varepsilon_2)$.
- Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$.
- Η γωνία $\hat{\alpha} = 130^\circ$.
- Η γωνία $\hat{\eta}$ είναι τετραπλάσια της $\hat{\theta}$.

A. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\theta}$ (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

B. Τι είδους τρίγωνο είναι το ABE ως προς τις γωνίες του ;

(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)

Γ. Τι είναι η ευθεία ε_1 στη γωνία $\hat{\Gamma}Ax$; (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)



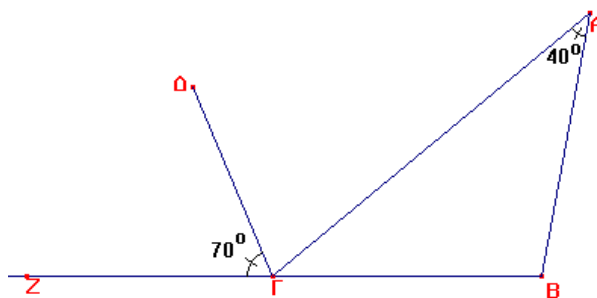
Στο διπλανό σχήμα η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle \Gamma Z$, η γωνία $\angle \Gamma \Delta = 70^\circ$ και η γωνία $\angle \text{ΒΑΓ} = 40^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες

$\angle \text{ΑΓΔ}$, $\angle \text{ΑΒΓ}$, $\angle \text{ΑΓΒ}$

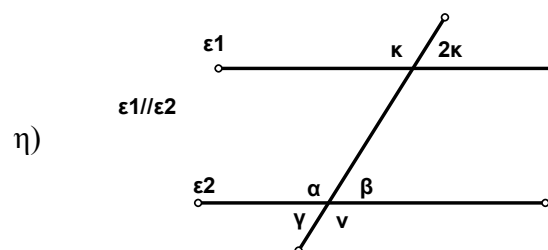
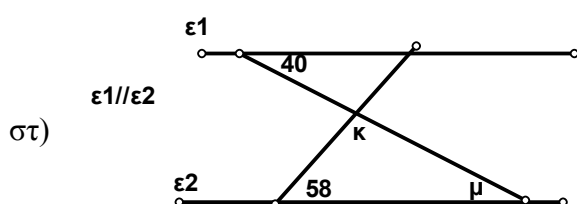
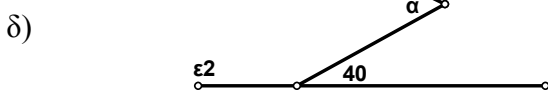
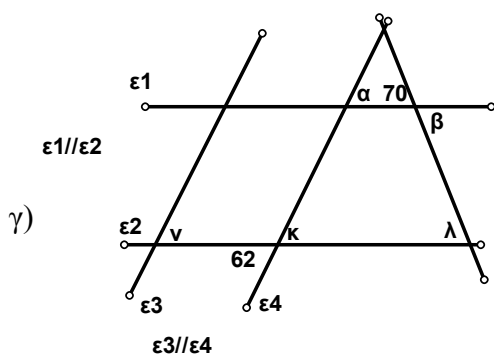
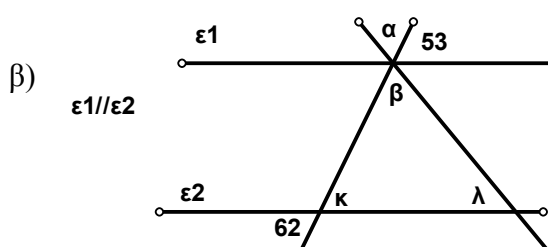
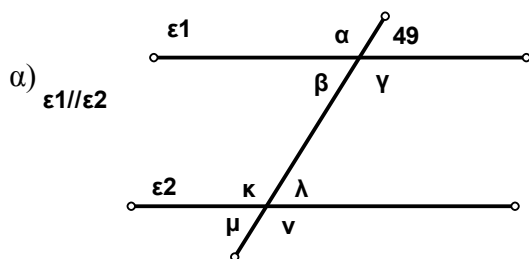
β) Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι παράλληλες οι ΑΒ και η ΓΔ

γ) Ποιο το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές και ποιο ως προς τις γωνίες;



Το θέμα αυτό δεν μπορεί φυσικά να δοθεί με τόσα ερωτήματα ! **SOS το (δ)**

Να υπολογίσετε τις γωνίες στα παρακάτω σχήματα:





σημείωμα για τους μαθητές

Φίλοι μαθητές.

Μην περιμένετε από τις όποιες υποδείξεις ,μεθόδους και κόλπα να μάθετε, αν δεν διαβάσετε την αντίστοιχη θεωρία και δεν την εμπεδώσετε. Προσοχή λοιπόν στην μελέτη της θεωρίας .

Όχι απλοί θεατές, αλλά πρωταγωνιστές !

Τα μαθηματικά θέλουν γνώση και ...φαντασία. Η φαντασία είναι έμφυτη, η γνώση και η τακτική αποκτιέται.

Για να λύσουμε μια άσκηση:

- Πολλοί λένε: "Από πού να αρχίσω;" **Μα φυσικά από αυτά που ζητάς.**
Ζητάς έναν αριθμό; Βάπτισε τον x . Ζητάς ένα σημείο; Βάπτισε το $M(x_0, y_0)$, ζητάς μία ευθεία;
Βάπτισε την $y = \lambda x + \beta$ κ.λ.π.
- Ανακαλύψτε τα δεδομένα της άσκησης που δεν φαίνονται με την πρώτη ματιά.
 - α. Εντοπίζουμε σε ποιο τύπο-ιδιότητα...κολλάει. Όλες οι ασκήσεις αναφέρονται κάπου.
Εντόπισε το.
 - β. Εργαζόμαστε στην υπόθεση και στο συμπέρασμα και καταλήγουμε σε ίδιο αποτέλεσμα.
 - γ. Μετασχηματίζουμε την πρόταση που μας ζητούν και καταλήγουμε σε πρόταση που ισχύει.
 - δ. Υποθέτουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει και καταλήγουμε σε άτοπο.
 - ε. **Μήπως η ενέργεια-λύση στηρίζεται στο προηγούμενο ερώτημα;**
 - ζ. **Ζωγραφίζουμε τα δεδομένα αν είναι δυνατόν.**

Καλή επιτυχία

Υ Γ

Θα είναι χαρά μας να μας υποδείξετε τα όποια λάθη στα βιβλιομαθήματα και να κάνετε τις όποιες παρατηρήσεις - υποδείξεις σχετικά με την προετοιμασία σας ή ότι άλλο εσείς νομίζετε .

Βαγγέλης Α Νικολακάκης

vagnik53@gmail.com

www.cutemaths.wordpress.com

